

Die quantitative Beschreibung der Planetenbewegung von Johannes Kepler in seinem handschriftlichen Nachlaß

Volker Bialas

Erstmals wird zusammenhängend dargestellt, wie Kepler die zur Beschreibung der Planetenbewegung erforderlichen Bahnelemente berechnet und wie genau ihm die Bahnbestimmung für die einzelnen Planeten gelungen ist. Quelle sind die bisher unveröffentlichten Kepler-Manuskripte Pulkowo.

1. Die Quantisierung beobachtbarer Naturvorgänge — ein Prinzip moderner Wissenschaft seit Kepler und Galilei
 2. Die Kepler-Manuskripte astronomischen Inhalts
 3. Das Marswerk — Neue Astronomie und Modell für die Beschreibung der Planetenbewegung
 - 3.1 Marsparallaxe
 - 3.2 Knotenlinie
 - 3.3 Neigung
 - 3.4 übrige Elemente
 - 3.5 Bewegungen von Aphel und Knoten
 - 3.6 die Sonnenbahn
 4. Ergänzungen zur Marsbewegung in den Handschriften
 5. Bahnbestimmung von Jupiter und Saturn
 - 5.1 Jupiterhandschriften
 - 5.2 Saturnhandschriften
 - 5.3 Vergleich der Bahnbestimmung von Jupiter und Saturn
 6. Bahnbestimmung von Venus und Merkur
 - 6.1 Venushandschriften
 - 6.2 Merkurhandschriften
 - 6.3 Vergleich der Bahnbestimmung von Venus und Merkur
 7. Chronologie der Bahnbestimmung
 8. Genauigkeit der Bahnbestimmung
-

Dr. Volker Bialas, Keplerkommission der Bayer. Akademie der Wissenschaften und Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut München, Deutsches Museum, 8 München 26, Postfach

1. Die Quantisierung beobachtbarer Naturvorgänge – ein Prinzip moderner Wissenschaft seit Kepler und Galilei

Zwei Werke vor allem stehen am Anfang moderner Naturbetrachtung in der Wissenschaft: Keplers „Neue Astronomie“ von 1609, das Marswerk mit den beiden ersten Planetengesetzen, und Galileis „Unterredungen und mathematische Beweise über zwei neue Wissenszweige“, sein physikalisches Hauptwerk von 1638. Sie setzen an die Stelle der Lehrmeinungen scholastischer Philosophie, die a priori die Wahrheit von der Natur für alle Zeiten gefunden zu haben glaubte, die Beobachtung und Analyse der Naturphänomene selbst und bedienen sich dabei der Mathematik — ihrer Zeit entsprechend — in der Sprache der Geometrie.

„Das Buch der Natur ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Schriftzüge sind Dreiecke, Kreise und andere Figuren, ohne deren Hilfe es unmöglich ist, auch nur ein Wort zu verstehen“ — ¹

schreibt Galilei 1623. 15 Jahre später begründet er eine quantitative Physik des bewegten Körpers. Kepler sagt 1597:

„Dann wird der Mensch endlich die Kräfte seines Geistes nach dem rechten Maß messen und einsehen, daß Gott, der alles in der Welt nach der Norm der Quantität begründet hat, auch dem Menschen einen Geist verliehen hat, der diese Norm erfassen kann . . . Er erfaßt eine Sache umso richtiger, je mehr sie sich den reinen Quantitäten nähert. Je weiter sich aber etwas von diesen entfernt, desto mehr Dunkelheit und Irrtum tritt auf.“ ²

Die „reinen Quantitäten“ sind in der Geometrie erschaubar. So kommt Kepler zu dem Weltentwurf seines „Mysterium Cosmographicum“ von 1596, allerdings ohne von der Beobachtung der Phänomene auszugehen. Tycho Brahe, der die Genialität dieses Werkes anerkennt, warnt daher zurecht in einem Brief an Mästlin 1598, in der Astronomie ohne Beobachtungen einen Fortschritt zu erwarten:

„Wenn die Verbesserung der Astronomie eher a priori mit Hilfe der Verhältnisse jener regulären Körper bewerkstelligt werden soll als aufgrund von a posteriori gewonnenen Beobachtungstatsachen, . . . so werden wir schlechterdings allzulange, wenn nicht ewig umsonst darauf warten, bis jemand dies zu leisten vermag.“ ³

Kepler selbst ist derjenige, dem die „Verbesserung der Astronomie“ schon ein Jahrzehnt später gelingt, nicht zuletzt dadurch, daß er sich zu dieser Auffassung bekennt: „Es dürfen die Spekulationen a priori nicht gegen die offenkundige Erfahrung verstoßen, sie müssen vielmehr mit ihr in Übereinstimmung gebracht werden.“ ⁴ Die Erfahrung selbst kann nur durch die systematische Beobachtung der Natur erworben werden. Sie ist schon Teil jenes Prozesses der Quantisierung, der mit der mathematischen Analyse des Beobachtungsmaterials, sei es auf geometrischem, sei es auf rein numerischem Weg, zu einem tiefer gehenden Verständnis der Natur führt.

In der Astronomie ist die Bahnbestimmung der Planeten aus den Beobachtungen ein hervorragendes Beispiel des quantisierenden Prinzips der Naturwissenschaft, und Kepler ist dessen erster großer Vertreter. Zwar ist schon seit Jahrhunderten vor Kepler der Weg der Bahnbeschreibung aus Planetenbeobachtungen beschritten worden, niemals aber ist es zu einer hypothesefreien quantitativen Analyse gekom-

men. Dieses Umdenken in der Methode, zugleich Aufstellen eines neuen Prinzips, wird erstmals konsequent von Kepler und Galilei vollzogen, von Kepler für die Astronomie, von Galilei für die Physik.

Als außergewöhnliches Dokument für diesen Tatbestand ist insbesondere der handschriftliche Nachlaß Keplers mit der Beobachtungsanalyse und der Ableitung der Bahnelemente für die numerische Beschreibung der Planetenbewegung von Bedeutung. Dabei kann, wie Kepler in seinem Marswerk nachweist, die Quantisierung eines Naturprozesses nicht nur zu einer bloßen quantitativen, sondern auch zu einer begründeten qualitativen Aussage führen, und der Weg vom „Sein der Dinge zu den Ursachen des Seins“ wird aufgetan.

2. Die Kepler-Manuskripte astronomischen Inhalts

Wenn über Keplers Darstellung der Planetenbewegung, soweit sie aus seinem handschriftlichen Nachlaß ersichtlich ist, hier erstmals in zusammenfassender Weise referiert wird, so wird damit ein bedeutungsvoller Abschnitt der Astronomie- und Wissenschaftsgeschichte an seinen Quellen selbst erläutert. Erst jetzt werden die für unser Verständnis des Astronomen Kepler wesentlichen Handschriften, die Vorarbeiten zu seinen astronomischen Hauptwerken „Astronomia Nova“ und „Tabulae Rudolphinae“ enthalten, systematisch gesichtet und aufgearbeitet*), 350 Jahre nach ihrer Niederschrift. Daß dies nicht schon viel eher geschehen ist, hat vor allem zwei Gründe, die einmal in Umfang und Inhalt, zum anderen im Schicksal der Handschriften nach Keplers Tod zu suchen sind.

Der handschriftliche Nachlaß umfaßt ca. 13 000 Seiten, von denen rund ein Drittel auf die Planeten- und Mondrechnungen entfällt. Bei diesem Umfang war an eine rasche Herausgabe, insbesondere an eine kritische Edition des Nachlasses ohnehin nicht zu denken. Hinzu kommt, daß die hier erwähnten Handschriften astronomischen Inhalts zum großen Teil die Aufzeichnungen Keplers enthalten *vor* der Abfassung der Hauptwerke. Die Form dieser Niederschriften — ausführliche Rechnungen stehen neben kommentierenden Worten — ist der Notizzettel, der sich für eine bloße Wiedergabe nicht eignet. So nimmt es nicht wunder, daß der Nachlaß astronomischen Inhalts durch sein Äußeres allein noch nie zur Bearbeitung ermuntert hat.

Von diesen Schwierigkeiten, die ebenso den gesamten Nachlaß betreffen, zeugt auch sein Weg durch die Jahrhunderte⁵. Zunächst wurde er von der Familie Keplers verwaltet, bis er über einige Zwischenträger — u. a. Johannes Hevelius — 1707 in den Besitz des Leipziger Magisters M. G. Hansch kam, der ihn auf 22 Bände verteilte und einige Stücke daraus veröffentlichen konnte. Nach Hanschs Tod versuchte der Nürnberger Gelehrte Ch. G. von Murr erneut, das Interesse der wissenschaftlichen Öffentlichkeit auf die Kepler-Manuskripte zu lenken. Schließlich erwarb sie 1773 Kaiserin Katherina II. für die russische Akademie der Wissenschaften, ohne daß es zur Veröffentlichung gekommen ist. Weitere Teile der Handschriften veröffent-

*) Die Ergebnisse dieser Aufarbeitungen werden in der Reihe „Nova Kepleriana — Neue Folge“ der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, veröffentlicht.

lichte Christian Frisch in seiner achtbändigen Gesamtausgabe der Werke Keplers Mitte des vorigen Jahrhunderts. Heute befinden sich 18 Bände der Originalhandschriften in Leningrad, Kopien der Manuskripte sind u. a. im Besitz der Bayerischen Akademie der Wissenschaften.⁶ Trotz mancher Versuche war es zur Sichtung und Herausgabe der Handschriften astronomischen Inhalts nicht gekommen. Das trifft sowohl auf das Druckmanuskript der „Tabulae Rudolphinae“ zu, das manche Änderung gegenüber dem gedruckten Werk aufweist, als auch auf die Mondhandschriften und die hier interessierenden Bände 13 und 14 der Pulkowoeer Kepler-Mss. mit den Planetenhandschriften. Band 14 enthält die Vorarbeiten zum Marswerk und einige spätere Korrekturen für das Tafelwerk. Band 13 ist in diesem Zusammenhang der wichtigste Band: Hier finden sich die Rechnungen Keplers zur Ableitung der Bahnelemente der Planeten, hier lassen sich die Wege nachzeichnen, die Kepler bei der quantitativen Beschreibung der Planetenbewegung gegangen ist.

3. Das Marswerk – Neue Astronomie und Modell für die Beschreibung der Planetenbewegung

Die ersten Untersuchungen Keplers der Marsbewegung 1600 bewegten sich noch zum großen Teil auf dem Boden der Überlieferung, wiewohl er zum Mißfallen Brahes der Kopernikanischen Theorie den entschiedenen Vorzug gab und danach strebte, die Einsichten des neuen Weltmodells mit der weniger komplizierten Ptolemäischen Beschreibung der Planetenbewegung zu vereinigen.

Ptolemäus hatte die Bahnen der Planeten durch zwei Ungleichheiten beschrieben, von denen die eine durch einen exzentrischen Kreis, die andere durch einen Epizykel dargestellt war. Kopernikus hatte die zweite Ungleichheit, die sich als Schleifenbewegung der Planeten von der Erde aus beobachten läßt und den Wechsel von Recht- und Rückläufigkeit der scheinbaren Planetenbewegung charakterisiert, als Überlagerungseffekt der Erdbewegung gedeutet. Damit war in seinem System der Ptolemäische Epizykel überflüssig geworden.

Die erste Ungleichheit dagegen, durch die ungleichförmige Bewegung des Planeten in seiner Bahn verursacht, stellte er durch einen anderen Epizykel dar; er ersetzte durch ihn den Ptolemäischen Exzenter, in dem er eine Verletzung des seit Plato und Aristoteles gültigen Axioms, die Planetenbewegung sei gleichförmig und vollziehe sich auf Kreisen, sah.

Kepler nun folgte Kopernikus bei der Deutung der zweiten Ungleichheit, verwendete aber als Bahnmodell zunächst den exzentrischen Kreis. Hierbei übernahm er aber nicht die von Ptolemäus stillschweigend getroffene gleiche Teilung der Exzentrizität, sondern bestimmte durch fortgesetzte Approximation die Entfernungen Erde — Exzentermittelpunkt und Exzentermittelpunkt — punctum aequans jeweils für sich. So kam er zu seiner „hypothesis vicaria“, die ihm bis zur Entdeckung der Bahnellipse die Planetenörter ohne größeren Widerspruch zu den Beobachtungen lieferte. Neu war zunächst der Ansatz Keplers: während noch bei Kopernikus sich die Apsidenlinien in einem Punkt abseits der Sonne schnitten, verlegte Kepler, vor allem aus physikalischen Überlegungen heraus, die Weltmitte in die wahre Sonne. Dementsprechend wurden zur Untersuchung der Planetenbahn nicht mittlere, son-

den wahre Oppositionen verwendet. Mit der Annahme der Ellipse als wahrer Bahn der Planeten rückte Kepler schließlich endgültig von dem obersten Postulat traditioneller Astronomie ab, die Planetenbewegung sei kreisförmig, die Bahnen müssen notwendigerweise Kreise oder aus Kreisen zusammengesetzt sein. Die „Astronomia Nova“ ist das große Buch Keplers von der Entdeckung der elliptischen Planetenbahn. Der Weg dieser Entdeckung führte über die quantitative Analyse der Mars- und Sonnenbewegung, erst aus einer Vielzahl von Bahnörter und ihren Abständen zur Sonne konnte die wahre Bahn nach vielen Versuchen bestimmt werden. Kepler mußte seine Ergebnisse über die Planetenbewegung ständig an den Beobachtungen prüfen, die Hypothese mußte verifiziert sein, ehe sie in die Theorie der „Neuen Astronomie“ übergehen konnte. So zeigt das Marswerk nicht nur, wie Kepler auf dem Weg der Induktion zur wahren Form der Planetenbahn vordringt, sondern stellt zugleich beispielhaft die quantitative Beschreibung der Planetenbewegung durch Bestimmung der Bahnelemente dar.

Die Bewegung des Planeten in der Bahn ist bestimmt sowohl durch seine Umlaufgeschwindigkeit als auch durch Form und Dimension der Bahn. Insgesamt sind diese Größen durch vier Bahnelemente charakterisiert:

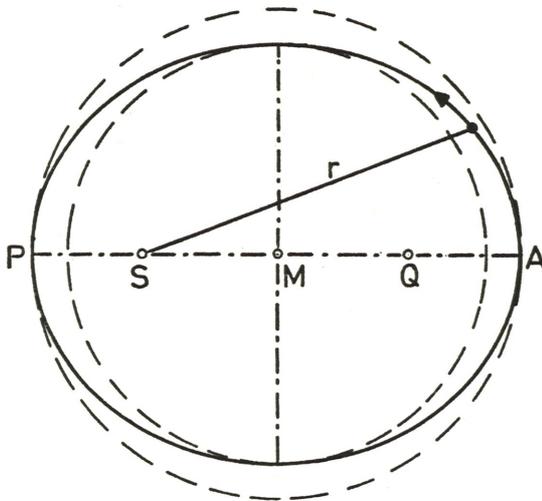


Fig. 1

Exzentrizität: linear als Abstand $SM = MQ = ae$, numerisch als Verhältnis

$$\frac{SM}{PM} = e;$$

Große Halbachse: Abstand $PM = a$. Die große Halbachse der Erdbahn wird 1 gesetzt.

Aphelrichtung: Die Richtung der Linie SA. Im Gegensatz zur modernen Astronomie werden die Anomalien nicht vom Perihel, sondern vom Aphel gerechnet.

Zur Aphelrichtung gehört, wie zur Bezugsrichtung der mittleren Bewegung, die Angabe eines Zeitpunktes; diese Daten bilden zusammen eine Epoche. Die Ellipse ist mit ihrer Ebene im Raum gegen die Ekliptikebene durch weitere zwei Bahnelemente festgelegt: durch die Neigung, den Winkel zwischen den Ebenen, durch die Schnittlinie beider Ebenen, die Knotenlinie. Kepler hält die Ellipse nicht starr fest, sondern läßt sie, entsprechend den alten Beobachtungen, eine zweifache Bewegung ausführen: Einmal dreht sie sich in ihrer Ebene, zum anderen dreht sie sich mit ihrer Ebene bei konstanter Neigung um die Sonne. Damit werden von Kepler zwei Bahnelemente als veränderlich angenommen: Richtung der Apsidenlinie und Richtung der Knotenlinie. Die Aufgabe der Bahnbestimmung besteht also darin, die vier konstanten und die zwei veränderlichen Bahnelemente abzuleiten:

- mittlere Bewegung m
- Exzentrizität e
- große Halbachse a
- Neigung i
- ✓ Knotenrichtung und Änderung in der Zeiteinheit.

Bei der Lösung seiner Aufgabe der Bahnbeschreibung des Mars, die zunächst eng mit der Ableitung der wahren Planetenbahn zusammenhing, diskutierte Kepler zunächst die klassischen Verfahren der Bahnbestimmung bis hin zu Tycho Brahe.

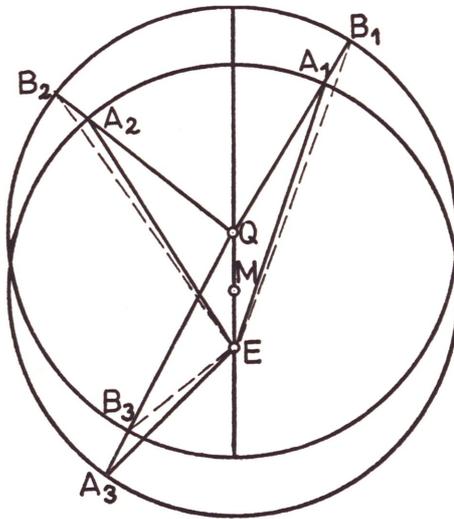


Fig. 2

Ptolemäus war von Oppositionen zur mittleren Sonne ausgegangen, da zu diesen Zeitpunkten der Planet stets den erdnächsten Punkt des Epizykels durchläuft, d. h. sich frei von der zweiten Ungleichheit zeigt. Die Richtung von der Erde zum Planeten zeigt jetzt zugleich auch zum Epizykelmittelpunkt, der auf dem Deferent liegt.

So legte sich Ptolemäus sein Verfahren zurecht, aus drei Oppositionen die Apogäumslage, d. h. Richtung von EQ, und die Exzentrizität des Exzentrers zu bestimmen.

men. Denn für jeden Zeitpunkt sind sowohl die Planetenörter A_i im Exzenter durch die Beobachtungen von der Erde E als auch die entsprechenden mittleren Örtter B_i im Ausgleichskreis um Q durch die Zeitintervalle bekannt. Ptolemäus löst seine Aufgabe ⁷, die Größe von QE und etwa des Winkels A_iEQ zu bestimmen, approximativ, indem er zunächst die Winkel B_iEA_i gleich Null setzt, d. h. die Kreise zusammenfallen läßt. Als weiteres Bahnelement wird schließlich der Epizykelhalbmesser aus einer Beobachtung außerhalb der Opposition ermittelt (Fig. 2).

Kopernikus verwendet ebenfalls vier Beobachtungen, darunter drei mittlere Oppositionen ⁸ und bestimmt die Exzentrizität (Abstand des Mittelpunktes der Erdbahn vom Mittelpunkt der Marsbahn sowie Radius des Epizykels), Apsidenrichtung und Verhältnis des Erdbahnhalmessers zum Planetenbahnhalmesser.

In der „Astronomia Nova“ geht Kepler von Oppositionen zur wahren Sonne aus. Da es sich um die Analyse der Bewegung des Planeten in seiner Bahn handelt, genügt es nicht, einfach die Ekliptiklängen der Oppositionen zu verwenden, die nicht ganz frei von der zweiten Gleichung sind. Es ist vielmehr nötig, „daß ein auf der Ekliptik gerechneter Bogen auf die Bahn des Planeten reduziert wird. Die Bahn des Planeten aber ist zuerst zu bestimmen aus der Neigung der Ebenen und aus der Lage der Knoten, die bekannt sein muß. Neigung und Knoten aber können hinwieder nicht ohne die tägliche Parallaxe ermittelt werden, wenn diese irgendwie bedeutend ist.“ ⁹

3.1 Marsparallaxe

So beginnt Kepler folgerichtig mit dem Aufsuchen der Marsparallaxe aus geeigneten Beobachtungen von Tycho Brahe, um dann mit parallaxefreien, d. h. den auf den Erdmittelpunkt reduzierten Werten zuerst die Knotenlinie und die Neigung der Ebenen zu berechnen. Das Problem der Parallaxenbestimmung ist eng verbunden mit der Theorie der Refraktion, beide Werte werden hier als Horizontalvariation zusammengefaßt. Infolge der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit und der fehlerhaften Tychonischen Refraktionstheorie, der sich Kepler notgedrungen anschließt, sind der Untersuchung keine zuverlässigen Ergebnisse beschieden, und Kepler kann lediglich die von Tycho Brahe angenommenen Marsparallaxen bestätigen.

3.2 Knotenlinie

Zur Bestimmung der Knotenlinie — zunächst noch am exzentrischen Kreis ¹⁰ vorgenommen — sucht sich Kepler solche Beobachtungen heraus, bei denen sich der Planet direkt in den Knoten oder in deren Nähe aufgehalten hat, d. h. die Breite ist 0 oder nahe bei 0. So kann er vier geeignete Beobachtungen für den aufsteigenden Knoten finden, die jeweils ungefähr um die Umlaufzeit des Mars von 687^d auseinanderliegen.

Für die Länge des aufsteigenden Knotens kommt vor allem eine Doppelbeobachtung des Jahres 1589 in Frage, derzufolge die Breite des Mars 67' und 21 Tage

später nur noch $6' 40''$ betrug. Bei einer gleichmäßigen Abnahme der Breite ergibt sich die Breite $0 \frac{2}{3}$ Tage nach der letzten Beobachtung. Die Orte der beiden Knoten am Fixsternhimmel ergeben sich roh für die Beobachtungszeiten aus der mittleren Bewegung des Mars nach den Prutenischen Tafeln und werden mit den Tychonischen Mittelpunktsgleichungen verbessert.

Die genauere Lage wird erst gegen Ende des Marswerkes¹¹ aus Beobachtungen mit geringer südlicher (B_1) und nördlicher Breite (B_2) abgeleitet, nachdem die neue

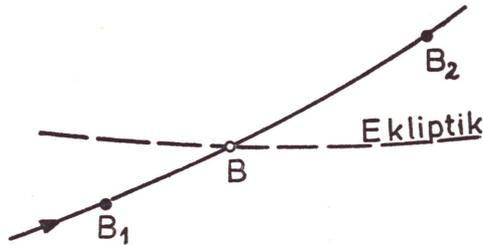


Fig. 3

Planetentheorie die exzentrischen Marsörter genau genug liefern kann. Die Knotenlage B wird für die Breite 0 aus B_1 und B_2 linear interpoliert.

3.3 Neigung

Im Gegensatz zu seinen Vorgängern nimmt Kepler an, daß die Epizykelebene immer parallel zur Ekliptikebene bleibt und daß die Exzenterebenen nicht schwanken, daß also die Neigung zwischen Bahnebene des Planeten und der Ekliptikebene konstant ist. Für eine Bestimmung gibt er vier Verfahren an.¹²

- a) Als erstes nutzt er die Erkenntnis, daß der Planet von Sonne und Erde aus unter gleich großer Breite erscheint, wenn er von beiden Gestirnen gleich weit entfernt ist. Wird die Entfernung Sonne — Erde zu 1000 angenommen, so lassen sich, wenn jeweils der kleinste und größte Abstand Sonne — Mars zugrunde gelegt werden, die Grenzen angeben, zwischen denen eine derartige Konstellation eintreten kann. So können die Richtungen Erde — Sonne und Erde — Mars einen Winkel einschließen, der zwischen $68^\circ 40'$ und $72^\circ 33'$ liegen muß.

- b) Als zweites bedient sich Kepler eines geometrischen Satzes, dessen Anwendung allein von der Kenntnis der Lage der Knotenlinien ausgeht:

„Wenn sich zwei Ebenen schneiden, so schließen stets zwei Linien, die durch denselben Punkt der Schnittlinie in den beiden Ebenen senkrecht zur Schnittlinie gezogen werden, einen und denselben Winkel ein.“

Die Ebenen sind die Ekliptikebene ACDB und die Marsbahnebene AEFB. Die beobachtete Breite FBD wird gleich der gesuchten Neigung sein, sofern die Richtung Erde — Sonne (BA) in Richtung der Knotenlinie zeigt, damit AE in Richtung der Wendepunkte und der Mars F von der Erde in Quadratur zur Sonne beobachtet wird (Fig. 4).

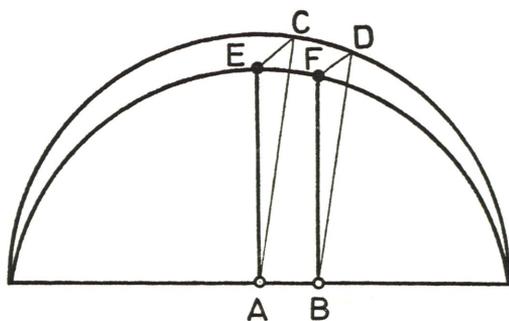


Fig. 4

- c) Schließlich ist, sofern die Abstände Sonne — Erde und Sonne — Mars in etwa bekannt sind, aus jeder akronychischen Beobachtung mit nennenswerter Breite die Neigung des Bahnpunktes, d. h. seine heliozentrische Breite, zu berechnen und schließlich über den Knotenabstand die maximale Neigung. Es sei bei einer Oppositionslage Fig. 5 ein Schnitt senkrecht zur Ekliptik.

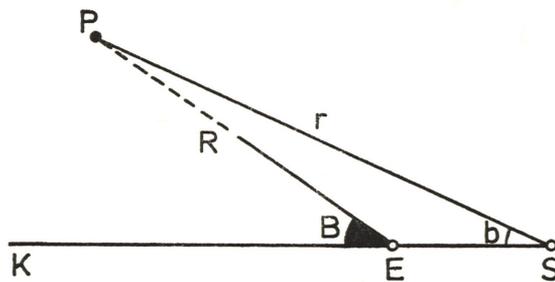


Fig. 5

Dann sind SEK die Ekliptik, KEP die beobachtete Breite B, KSP die Neigung b. Es ergibt sich b über Winkel P nach

$$b = B - P \text{ mit } \frac{\sin B \cdot ES}{\sin P} = \frac{SP}{r}$$

und die gesuchte Neigung i nach

$$\sin i = \sin b_{\max} = \frac{\sin b}{\sin(L - \varnothing)}$$

wenn $L - \varnothing$ der Knotenabstand des Planeten ist.

- d) Daneben geht Kepler noch auf die Beziehungen ein¹³, die an Fig. 5 unter Berücksichtigung der Abstände Mars — Erde abzulesen sind. Es ist dann direkt:

$$\sin b = \frac{R \cdot \sin B}{r}$$

3.4 Übrige Elemente

Die Ableitung der übrigen Bahnelemente läßt sich nur im Zusammenhang mit Keplers Bemühungen, die wahre Hypothese zu finden, sehen. Dies hier nachzuvollziehen und wiederzugeben, würde entschieden zu weit führen. So sollen nur einige Anmerkungen gemacht werden, um auf die Komplexität dieser Aufgabe hinzuweisen.

Die wahre Hypothese zur Beschreibung der Planetenbewegung hat nach Kepler doppelte Bedeutung: einmal soll zunächst die „Natur der Dinge“ abgebildet werden, zum anderen soll das aus der Hypothese resultierende Kalkül den Bewegungsablauf ohne größeren Widerspruch zu den Beobachtungen darstellen. Der zweiten Forderung versuchten auch schon frühere Entwürfe der Bahnbeschreibung zu genügen, als die Beobachtungen geringere Genauigkeit aufwiesen. Jetzt aber wurde erwartet, daß das Modell der Planetenbewegung zugleich auch ein Abbild der Natur sei: Wo sich in Wahrheit die Bewegung in der Ellipse zeigt, kann die Bahn nicht länger durch Epizykel und exzentrische Kreise beschrieben werden.

Schrittweise tastet sich Kepler an die Lösung seiner Aufgabe heran. Wie schon früher bei den Bahnbestimmungen der Alten, zeigt sich auch hier die gegenseitige Abhängigkeit der Bahnelemente. Der Versuch, aus vier Oppositionen am exzentrischen Kreis von der gleichen Teilung der Exzentrizität abzugehen, führt in der „hypothesis vicaria“ zur Bestimmung der Teilexzentrizitäten und der Apsidenlinie. Daß diese Hypothese zwar die Örter zufriedenstellend darzustellen vermag, im übrigen aber mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt, zeigt die Überprüfung der Exzentrizität mittels der akronychischen Breiten¹⁴ in Umkehrung des Verfahrens c) von Abschnitt 3.3. Er enthält, indem er — wie früher schon — die Tychonische Sonnentheorie nach den Progymnasmata heranzieht, Entfernungen der Apsidenpunkte der Marsbahn von der Sonne und bestimmt die Exzentrizität aus dem Vergleich dieser Distanzen mit ihrem Mittelwert.

Bezugsrichtungen der mittleren Bewegung und der Apsidenlinie zeigen sich voneinander abhängig, denn bei Verschiebung des Aphels verändert sich die Anomalie und damit die Gleichung des Planeten, so daß die Gleichungsänderung durch eine Drehung der Bezugsrichtung der mittleren Bewegung kompensiert werden muß.

Gleiches gilt für die Exzentrizität: Da Apsidentfernungen Ausgang der Exzentrizitätsbestimmung sind, bewirkt eine Verschiebung der Apsidenrichtung eine geringe Abstands- und damit Exzentrizitätsänderung. Die Entfernungen, die bei der Bestimmung der wahren Planetenbahn eine wesentliche Rolle spielen, werden aus Dreiecken Erde — Sonne — Mars berechnet. Als endgültiger Wert der Exzentrizität wird schließlich ein mittlerer Betrag aus mehreren Rechnungen genommen, auf den dann Apsidenabstände und Radius abgestimmt werden.

3.5 Bewegungen von Aphel und Knoten

Diese Bewegungen werden als konstant vorausgesetzt und aus möglichst zuverlässigen Angaben über Apsiden- und Knotenrichtung zu zwei verschiedenen, möglichst weit auseinanderliegenden Zeitpunkten bestimmt. Kepler stellt den aus

Tychonischen Beobachtungen abgeleiteten Richtungen Werte gegenüber, die auf Angaben des Ptolemäus zurückgehen. Denn, so schreibt Kepler¹⁵, „wäre dieser Meister nicht da, so würden wir heute noch viel weniger von diesen ganz langsamen Bewegungen wissen. Außer ihm findet sich niemand, seit die Völker die Wissenschaften ausgebildet haben, der uns hierbei helfen könnte“, um dann aber am Ende seiner Untersuchungen resignierend fortzufahren:¹⁶ „Da uns also geeignete Beobachtungen aus dem Altertum fehlen, sehen wir uns durch den Stand der Dinge dazu gezwungen, die Erörterung der Bewegung der Knoten, wie so vieles andere, der Nachwelt zu überlassen.“

Aus Ptolemäischen Angaben findet sich die Richtung des Apogäums des Mars, das Kepler auf den Sonnenmittelpunkt über die Werte der Exzentrizitäten von Sonne und Mars umrechnet. Ebenso läßt sich die Knotenrichtung zur Zeit des Ptolemäus aus einer Angabe über den nördlichen Wendepunkt des Mars bestimmen.

Am Schluß seines Marswerkes¹⁷ versucht Kepler, anhand von drei Ptolemäischen Beobachtungen die mittlere Bewegung, die Bewegung des Aphels und die der Knoten zu verbessern, indem er systematisch die einzelnen Elemente verändert, um die Differenzen zwischen Beobachtungen und Rechnungen zu verringern.

3.6 Die Sonnenbahn

Nachdem sich die Kreisbahn der Planeten nicht mehr halten läßt, erforscht Kepler im dritten Teil der „Astronomia Nova“ die Erd- oder Sonnenbahn. Dadurch erhofft er, die Abstände Erde — Sonne, die Basiswerte für die Berechnung der Marsabstände von der Sonne, zu erhalten. Er beginnt also — im Gegensatz zur alten Astronomie — die tiefer gehende Erforschung der Marsbahn mit der Diskussion der zweiten Ungleichheit. Tycho Brahe stellt zwar im Band 1 seiner Progymnasmata eine Sonnentheorie bereit, auf die Kepler auch bisher zurückgegriffen hat, in dessen sollen deren Ergebnisse weiterhin nicht unbesehen übernommen werden.

Worum geht es bei der Theorie der Sonnenbahn? Zunächst stellt sich das Problem einfacher als bei den Planeten dar, weil die Sonnenbahn mit der Ebene der Ekliptik zusammenfällt und damit Lage der Knotenlinie und Neigung der Ebenen als Bahnelemente der Sonne nicht definiert sind. Sodann ist der Radius, die spätere große Halbachse der Bahnellipse, als Maßstab der Planetenbahnen, gleich 1 gesetzt, so daß die Abstandsbestimmung der Sonne auf die Ermittlung ihrer Exzentrizität hinausläuft, die sich ihrerseits über die Entfernungen zu den Apsidenpunkten ergibt. Die gewünschten Abstände erhält Kepler¹⁸, indem er Marsbeobachtungen aufsucht, für die sich der Planet stets an derselben Stelle des Exzentrums befindet, und die unbekannte Entfernung Sonne — Mars als Maßstab einführt, also gleich 1 setzt. Damit kann Kepler zur Lösung der Aufgabe schreiten, aus drei Entfernungen der Sonne von der Erde das Apogäum der Sonne und die Exzentrizität zu ermitteln¹⁹.

Gegeben sind die von A ausgehenden Linien und die Winkel bei A. Gesucht sind die Größe der Strecke AB und die Richtung dieser Linie. In jedem Dreieck AED und ACE sind also drei Stücke bekannt. Damit lassen sich der Peripheriewinkel DCE über der Sehne DE und der zugehörige Zentriwinkel beim Kreismittelpunkt B,

Winkel DBE, berechnen. Im gleichschenkligen Dreieck DBE sind die Seite DE — aus Dreieck AED — sowie alle Winkel gegeben. Der Kreisradius DB ist nun das dritte bekannte Stück im Dreieck DAB neben der Seite AD und dem sich aus der Differenz bekannter Winkel ergebenden Winkel bei D. Ohne große Schwierigkeiten können jetzt im Dreieck DAB die gesuchten Stücke, Seite AB und Winkel DAB, abgeleitet werden.

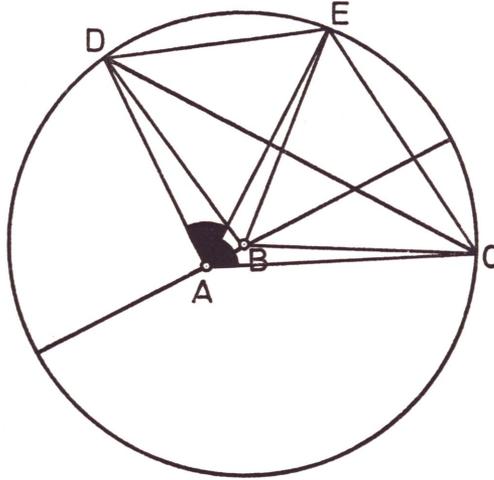


Fig. 6

Kepler kommt so zu dem Ergebnis, daß die Tychonische Exzentrizität zu halbieren ist. Schließlich wird anhand vier anderer Beobachtungen das Verfahren wiederholt und das Ergebnis bestätigt. Mit bekannter Exzentrizität lassen sich nun die gesuchten Entfernungen Sonne — Erde auf geometrischem Weg leicht ableiten.

4. Ergänzungen zur Marsbewegung in den Handschriften

Die Marshandschriften in Band 14 der Pulkwoer Kepler-Mss. enthalten Entwürfe zum Marswerk, Vorarbeiten und Rechnungen, die ins gedruckte Werk nicht übernommen worden sind. Sie bieten manche zusätzliche Information darüber, wie Kepler vorgegangen ist bei seinem grandiosen Entwurf der „Astronomia Nova“. Auf diese für das Marswerk wesentlichen Handschriften soll nur so weit eingegangen werden, als sie zur Darstellung der Marsbewegung Neues hinzufügen. Daneben sind spätere Niederschriften in diesen Handschriften von Bedeutung, die nach Herausgabe der „Astronomia Nova“ abgefaßt worden sind.

Im wesentlichen handelt es sich dabei um weitere Bestimmungen der Exzentrizität und um Überlegungen zur Knotenbewegung. Die „hypothesis vicaria“ lieferte ja die wahren Bahnörter ohne nennenswerte Fehler, und mit bekannter Aphelrichtung waren somit die wahren Anomalien v_1 gegeben. Andererseits waren die Oppositionsbeobachtungen zugleich exzentrische Bahnörter und ihre Differenzen ebenso Diffe-

renzen der wahren Anomalie. Damit lagen bekannte Werte in wahrer Anomalie oder Anomaliedifferenzen vor, die Kontrollwerte für die Prüfung der Exzentrizität sein konnten. Denn über die Exzentrizität lassen sich aus mittleren Anomalien oder Differenzen mittlerer Bewegungen, gegeben aus Beobachtungszeitpunkten, wahre Anomalien berechnen.

Zunächst prüft Kepler die Exzentrizität an verschiedenen Oppositionen²⁰, an zwei Oppositionen, die vor und hinter dem Aphel liegen, sowie an zwei anderen in ähnlicher Lage beim Perihel. Die Apsidenlinie teilt die mittlere Anomalie M in zwei Teilanomalien M_1 und M_2 :

$$M = M_1 + M_2,$$

die in entsprechende wahre Anomalien $v = v_1 + v_2$ umzurechnen sind.

Das geschieht über eine Tabelle der physischen Gleichungen mit $e = 0.09300$. Zugleich versucht Kepler, die sich ergebenden Widersprüche in v durch Verschieben des Aphels auszugleichen, allerdings ohne Erfolg. Die Exzentrizität scheint also etwas kleiner zu sein.

Nicht viel anders fällt die Prüfung aus, wenn die wahren Anomalien nicht aus den Oppositionen, sondern über die „hypothesis vicaria“²¹ ermittelt werden und jetzt als Sollwerte für die über die Tafel berechneten Anomalien fungieren. Auch hieran zeigt sich, daß mit e das Aphel zu ändern ist.

Andere im Marswerk nicht enthaltene Versuche zur Bestimmung der Neigung nach Verfahren c) von Abschnitt 3.3. finden sich ebenfalls in den Handschriften. Hier ist von Interesse, daß Kepler bei der Reduktion der Neigung auf die maximale Neigung nach

$$\sin b_{\max} = \frac{\sin b}{\sin (L - \Omega)}$$

sexagesimal rechnet und vermutlich eine Hilfstafel verwendet²². Der Sinus für kleine Winkel ist durch den Winkel selbst ersetzt. Die Rechnung ist ein Beispiel für eine Division mit sexagesimalen Zahlen. So rechnet er:

$$\begin{array}{r}
 b = 1^\circ 50' 40'' \\
 L - \Omega = 84^\circ 32' 22'' \\
 \\
 \begin{array}{r}
 b \quad 1.50.40 \\
 \sin (L - \Omega)_{\text{sexag.}} \quad 59.43 \quad - \quad 1. \ 0. \ 0 \\
 \hline
 \text{Differenz} \quad 50.57 \\
 \text{nächstliegender Wert} \quad 50.46 \quad \quad 51.11 \\
 \hline
 b_{\max} \quad 1.51.11.
 \end{array}
 \end{array}$$

Die Bestimmung der Neigung aus Beobachtungen in Nähe der Apsidenlinie bestätigt Keplers Annahme, daß der Durchmesser der Bahn durch den Mittelpunkt der Sonne läuft²³. Nach Verfahren d) von Abschnitt 3.3. ergeben sich aus Aphel- und Perihelentfernungen gleiche Neigungen, so daß Kepler kommentiert: „Ecce pares. Fiunt ergo sectiones in locis oppositis, et transit sectionum diameter per centrum solis.“

Für die Berechnung der Aphelbewegung werden die Apsidenrichtungen der Jahre 140 und 1620 zugrunde gelegt, so daß für 1480 Jahre eine Bewegung von $30^{\circ} 0' 25''$ ermittelt wird²⁴. Die Knotenbewegung, im Marswerk mit $40''$ pro Jahr angegeben und von hieraus in das Tafelwerk („*Tabulae Rudolphinae*“) übernommen, versucht Kepler in einem Abschnitt „*Pro motu nodorum*“²⁵ zu verbessern. So ergibt sich für rund 1450 Jahre der Bogen von 17° oder die jährliche Knotenbewegung von $42''$.

Für die wahre Marsbewegung hat Kepler, ähnlich wie für die anderen Planeten, eine Tabelle aufgestellt²⁶ — analog zur Tafel der Tagbewegungen der Sonne in den „*Tabulae Rudolphinae*“ —, die er aber nicht ins Tafelwerk übernimmt. Diese „*Tabula diurnorum Martis*“ geht von der Epoche 1615 aus. Für die laufenden Tage 0 bis 343, also bis zur Rückkehr des Mars zur Apsidenlinie nach einem halben Umlauf, werden sogleich Neigung (*inclinatio*), Entfernung in der Ekliptik (*distantia curtata*) und wahre Länge (*motus verus reductus*) angegeben. Der Nachteil dieser Tafel besteht darin, daß sie nur für einen kurzen Zeitraum gilt und daher für ein Tafelwerk mit dem Anspruch langer Gültigkeitsdauer nicht in Frage kommt.

Aus den Handschriften geht schließlich hervor, daß Kepler an der Ableitung der mittleren Bewegung („*Pro constituendis Epochis motuum mediorum Martis*“)²⁷ noch 1624 gearbeitet hat und dabei neben den schon vom Marswerk her bekannten Ptolemäischen Beobachtungen neuere von Regiomontan und Walther sowie eine Beobachtung von Gemma Frisius vom 31. Oktober 1544 heranzieht²⁸.

Die Hypothese des „*dies creationis*“, in der Kepler aus astronomischen und chronologischen Gründen auf den 23. Juli des Jahres 3993 v. Chr. als Schöpfungstag kommt und die Annahme vertritt, daß sich dieser Tag durch eine außergewöhnliche Konstellation der Planeten sowie der Apsiden- und Knotenpunkte ihrer Bahnen auszeichnen müsse, wird ebenfalls an der mittleren Bewegung geprüft.

Die Sonnentheorie, für welche die Exzentrizität und Apsiden bereits im Marswerk endgültig bestimmt sind, die Ableitung der Epochen aber noch fehlt, ist in den Marshandschriften nicht weitergeführt worden. Hier ist allenfalls eine Tabelle „*Tabula distantiae terrae a Sole ad quinos gradus*“ erwähnenswert²⁹, die für exzentrische Anomalien 0 bis 180° im Abstand von je 5° die Entfernungen Erde — Sonne enthält. Die Exzentrizität beträgt 0.01792.

Insgesamt gesehen haben die Marshandschriften erheblich größere Bedeutung für das Marswerk als für das Tafelwerk. Die genaue Sichtung des Materials wird detailliert Auskunft geben über die Arbeiten Keplers zum Marswerk und einige Ergänzungen der von ihm selbst in großer Ausführlichkeit dargestellten Entdeckung der elliptischen Planetenbahn liefern.

5. Bahnbestimmung von Jupiter und Saturn

Die Jupiter- und Saturnhandschriften von Band 13 der Kepler-Mss. sind bereits durchgesehen, die Ergebnisse veröffentlicht bzw. zum Zeitpunkt dieser Niederschrift für die Veröffentlichung vorgesehen³⁰. Die zusammenhängende Darstellung der Bahnbestimmung von Jupiter und Saturn kann sich daher auf die detaillierte Aufarbeitung des Kepler-Nachlasses stützen.

5.1 Jupiterhandschriften

Wie beim Mars geht Kepler in der Beobachtung der Bewegung der übrigen Planeten von Planetenbeobachtungen aus, die, entsprechend seinen geometrischen Vorstellungen, gerade für die Ableitung der einzelnen Bahnelemente geeignet erscheinen. Die Aufgaben werden zum größten Teil an der Bahngeometrie entwickelt, sie werden dann, soweit es die mathematischen Hilfsmittel zulassen, numerisch gelöst.

Bei der Bestimmung von *Knotenlage* und *Bahnneigung* geht Kepler wie im Marswerk von Planetenörtern in Nähe der Ekliptik aus und interpoliert die Länge für die Breite 0, d. h. die Schnittpunkte der Bahnellipse mit der Ekliptikebene. Die Neigung bestimmt er in Anlehnung an Verfahren d) von Abschnitt 3.3, nur daß anstelle der tatsächlichen Entfernungen ihre Projektion in die Ekliptikebene betrachtet und mit den Winkeln Elongation und Kommutation gerechnet wird³¹. Die Reduktion der heliozentrischen Breiten auf die Wendepunkte, die erforderlich ist, um die wahre Größe der Bahnneigung zu erhalten, offenbart die Abhängigkeit der Breiten vom Knotenabstand; denn es ist

$$\tan b_{\max} = \tan i = \frac{\tan b}{\sin(L - \Omega)} .$$

Ist i bekannt und läßt sich die heliozentrische Breite b über die beobachtete Breite B und den Abstand des Planeten von der Erde ermitteln, so läßt sich nach obiger Formel der Knoten berechnen. Die endgültige Festlegung der Knotenlage erfolgt über die *Knotenbewegung*, über deren Bestimmung sich erst am Schluß der Jupiterhandschriften einige Angaben finden. Nach einem Versuch mit von Ptolemäus überlieferten Jupiter-Örtern der Jahre 341 v. Chr. und 241 v. Chr. in Nähe der Ekliptik, aus denen Kepler ähnlich wie vorher die Null-Lage für die Breiten interpoliert, greift er auf seine Hypothese des „dies creationis“ zurück und setzt:

$$\Omega \text{ am 24. Juli 3993 v. Chr. in } 0 \text{ } \textcircled{\infty}$$

eine Festlegung, die freilich in Widerspruch steht zu den alten Beobachtungen.

Für die *Exzentrizität* wird zunächst ein Näherungswert berechnet³², der nach genauer Kenntnis des Aphels noch verbessert wird. Die Exzentrizität ist ja als konstanter Faktor in den Gleichungen enthalten, die sich näherungsweise nach

$$A = 2e \sin E$$

berechnen lassen. Mit der ungefähren Lage der Apsidenlinie, die Kepler den „Tabulae Prutenicae“ des Reinhold entnimmt, lassen sich die Bahnörter mit $E = 90^\circ$

aus geeigneten Oppositionen herausfinden, so daß $e \approx \frac{1}{2}A$ wird. A , jetzt die maximale Mittelpunktsgleichung, ist aber aus dem Unterschied zwischen mittlerer und wahrer Bewegung bekannt.

Die Lage der *Apsidenlinie* ist aus zwei auseinander liegenden Bahnbögen abzuleiten, zu deren Durchlaufen der Planet jeweils dieselbe Zeit benötigt. Denn nach dem Flächensatz wird die Bewegung zum Perihel hin schneller, zum Aphel hin langsamer. Die Bewegungsdifferenzen aus je zwei symmetrisch zur Apsidenlinie liegenden Oppositionsbeobachtungen sind gleich groß und umgekehrt: bei gleich großen

Bahnbögen liegt die Apsidenlinie in der Mitte der Bahnörter. Nach diesen Überlegungen wird eine Anzahl von entsprechenden Bahnörtern herausgesucht und für die Bestimmung des Aphels verwendet. Eine Differenz zweier derartiger Bahnbögen, bei asymmetrischer Lage zur Apsidenlinie $\neq 0$, ist auf verschiedene große Gleichungen zurückzuführen, die durch eine Verschiebung des Aphels in die richtige Lage ausgeglichen werden kann. Den gesuchten Verschiebungsbetrag berechnet Kepler, indem er die Gleichungsänderung für 1° Apheländerung ermittelt. Hier, wie an verschiedenen anderen Stellen, kommt Kepler zu einer Betrachtung der funktionalen Abhängigkeit kleiner Größen, ohne als praktischer Mathematiker zum Grenzübergang der Infinitesimalrechnung vorzudringen. Lage des Aphels und Größe der Exzentrizität sind durch die gewählten Verfahren mit der Mittelpunktsgleichung gekoppelt. 6 Oppositionen hat Kepler verwendet, den 6 beobachteten Bahnörtern stehen 6 mit den vorläufigen Bahnelementen berechnete Örter gegenüber. Ihre Differenzen erlauben, entsprechend der Verteilung der Örter in der Bahn, Rückschlüsse auf Apsidenlinie, Exzentrizität und Bezugsrichtung der mittleren Bewegung. Kepler läßt die Exzentrizität unverändert und korrigiert Aphel und mittlere Bewegung.

Diese Richtungen werden endgültig festgelegt im Zusammenhang mit der Diskussion der *Epochen* des Jupiter, wenn es darum geht, Apheländerung und mittlere Bewegung zu bestimmen. Alte Angaben über die Apogäumsrichtung findet Kepler bei Ptolemäus und Albategnius. Die Epochen werden geprüft an einer alten Beobachtung des Jahres 241 v. Chr. und an 4 Ptolemäischen Örtern der Jahre 133 bis 139 und so lange verbessert, bis die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung klein genug erscheinen. Zuvor ist es aber notwendig, die Jupiter-Örter auf die wahre Sonne zu beziehen und wahre Oppositionen zu berechnen. Das weitere Vorgehen ist bereits von früher her bekannt: Kepler bildet aus 3 Oppositionen 2 Differenzen, die er mit den Unterschieden in mittlerer Bewegung vergleicht. Es gelingt ihm aber nicht, alle über die endgültigen Epochewerte berechneten Örter den Beobachtungen anzugleichen. Er vermutet daher eine Abhängigkeit der Exzentrizität von der Zeit, ohne diese Überlegung jedoch in die Bahntheorie des Jupiter zu übernehmen. Die Hypothese des „dies creationis“ wird kurz diskutiert.

Die *große Halbachse* wird über zwei Stufen bestimmt, zunächst näherungsweise aus Beobachtungen in Nähe der Apsidenlinie im Dreieck Sonne-Erde-Jupiter. Kepler erhält:

$$\begin{array}{ll} \text{Perihelentfernung} & a - ae \\ \text{Aphelentfernung} & a + ae \end{array}$$

und daraus a und nochmals e . Die Apsidenentfernungen werden sodann nach geringer Korrektur der Aphelrichtung verbessert, und die Rechnung wird wiederholt. Die bereits früher berechnete Exzentrizität ist dabei das Maß für die Güte dieser Entfernungsbestimmung. Andere Rechnungen Keplers gehen von mittleren Längen aus und bestimmen a direkt nach

$$a = \frac{r}{1 + e \cos E} .$$

So kommt Kepler zu einer Reihe von a -Werten, aus der er fünf auswählt und deren Mittelwert als endgültige Größe der großen Halbachse ins Tafelwerk übernimmt.

5.2 Saturnhandschriften

Die Bestimmung der Saturnbahn³³ verläuft im Prinzip wie beim Jupiter, die Erläuterungen sollen daher nur dort etwas ausführlicher werden, wo sich zwischen beiden Bahnbestimmungen deutliche Unterschiede gezeigt haben.

Die Lage der *Knotenlinie* wird wie früher aus ekliptiknahen Planetenörtern interpoliert. Die *Knotenbewegung*, zunächst aus Ptolemäischen Angaben über den nördlichen Wendepunkt näherungsweise bestimmt, ergibt sich schließlich über eine Chaldäische Beobachtung des Jahres 229 v. Chr. und unter der Annahme, daß zur Zeit des von Kepler angenommenen „dies creationis“ ∞ in $0^\circ \vee$ liegt.

Die Kenntnis der Knoten bzw. Wendepunkte erlaubt die Reduktion beobachteter Breiten auf maximale Breiten und gibt damit erste Anhaltspunkte für die Größe der *Neigung*. Sie läßt sich genauer ermitteln, wenn Beobachtungen untersucht werden, für die Saturn gleich weit von Sonne und Erde entfernt ist (Verfahren a von Abschnitt 3.3). Diese Konstellation ergibt sich bei der großen Entfernung des Saturn von beiden Gestirnen in Nähe der Quadratur. Der kleine Winkel beim Saturn, die Bahnparallaxe oder „prosthaphaeresis orbis“, ist gleich der maximalen Gleichung von ungefähr 6° , wenn die Richtung Erde — Sonne in Nähe der Apsidenlinie des Saturn zu liegen kommt oder als mittlere Apsidenlinie angenommen wird. Die gewünschte Position mit gleich großen Winkeln bei Sonne und Erde tritt dann ungefähr 3 Tage nach der Quadratur ein, und die beobachtete Breite wird gleich der heliozentrischen Breite. Die endgültige Neigung bestimmt sich dann als Mittelwert aus 7 nach diesem Verfahren ermittelten heliozentrischen Breiten, die zuvor auf die Wendepunkte reduziert sind.

Das Verfahren zur Berechnung der *Exzentrizität* unterscheidet sich von dem in den Jupiterhandschriften kaum. Es werden 4 Oppositionsbeobachtungen in Nähe der mittleren Längen verwendet und zu 3 Kombinationen von je zwei gegenüberliegenden Bahnörtern zusammengestellt. Der zwischen ihnen gebildete wahre Bahnbogen wird mit der mittleren Bewegung verglichen: der vierte Teil ihrer Differenz ist die gesuchte Exzentrizität.

Bei der Ableitung der *großen Halbachse* schlägt Kepler drei verschiedene Wege ein: zunächst bestimmt er a wie früher über die Entfernungen der Apsidenpunkte, dann direkt über die Radien in Nähe mittlerer Längen. Als drittes wird die in der „Harmonice Mundi“ veröffentlichte Beziehung zwischen den Umlaufzeiten zweier Planeten und den Halbmessern ihrer Bahnen, heute „drittes Keplersches Gesetz“ genannt, in der Form

$$a = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

herangezogen³⁴.

Diese Stelle ist insofern von besonderem Interesse, als hier das einzigmal das 3. Gesetz zur Ableitung eines Bahnelements verwendet wird. Mit der Umlaufzeit des Saturn von $U_1 = 10759^{\text{d}}.2$ und der der Erde $U_2 = 365^{\text{d}}.25$ aus den „Tabulae Prutenicae“ wird a 9.537. Kepler indessen nimmt für a den vorher bestimmten Wert von 9.51, der vom modernen Wert 9.557 erheblich mehr abweicht (vgl. Abschnitt 8).

Wahrscheinlich ist die Anwendung des 3. Gesetzes hier mehr als Kontrolle auch der Zahlenangaben der alten Tafeln zu verstehen, denn die Rechnung ist erst kurz vor Fertigstellung der „*Tabulae Rudolphinae*“ im März 1624 ausgeführt.

Die Bestimmung von *Aphel* und *Aphelbewegung* unterscheidet sich zunächst nicht von der in den Jupiterhandschriften. Hier werden Näherungswerte aus 10 Oppositionsbeobachtungen und einer Ptolemäischen Angabe abgeleitet. Die endgültige Berechnung erfolgt im Zusammenhang mit der Diskussion der mittleren Bewegung, *motus medius*, worunter nicht nur die mittlere Bewegung des Planeten in seiner Bahn, sondern auch seine Epoche, das ist die Angabe des mittleren Planetenortes zu einer bestimmten Zeit, zu verstehen ist. In einer Übersicht stellt Kepler 27 Oppositionsbeobachtungen zusammen, die durch günstige Wahl der noch gesuchten Bahnelemente über eine Ephemeridenrechnung bestmöglich darzustellen sind. Insbesondere geht es um die Verbesserung der Aphelrichtung, der eine entsprechende Drehung der Ellipse um die Sonne gleichkommt, und um die Änderung der Nullrichtung der mittleren Bewegung, der eine Verschiebung der mittleren Planetenörter in entgegengesetzter Richtung entspricht. Kepler rechnet zunächst mit den vorliegenden Ausgangswerten und bringt dann anhand der Differenzen Rechnung — Beobachtung Korrekturen im erläuterten Sinne an. Insgesamt kommt er aus der Diskussion der jeweiligen Ergebnisse zu drei Korrekturen, bis er sich zufrieden gibt. Wiederum finden sich Betrachtungen Keplers, die an die Infinitesimalrechnung erinnern, etwa wenn er fragt, welche Änderung die Mittelpunktsgleichung bei einer kleinen Änderung des Perihels erfährt und diese Aufgabe über zwei um 1° auseinanderliegende Anomalien löst. Kepler versucht bei seinem Verfahren, die Restdifferenzen Rechnung — Beobachtung möglichst klein zu halten und insbesondere große Einzelwerte zu vermeiden.

Für die endgültige Berechnung der mittleren Planetenbewegung und Apheländerung werden fünf alte Beobachtungen herangezogen und in Variation des gerade beschriebenen Verfahrens Epochewerte für die vollendeten Jahre 138 und 1590 abgeleitet. Die Differenzbeträge liefern die gesuchten Bewegungen.

5.3 Vergleich der Bahnbestimmung von Jupiter und Saturn

Die Bestimmung der Bahnen von Jupiter und Saturn schließt sich eng an das im Marswerk beschriebene Modell an. Wie dort stehen auch hier viele z. T. vorzügliche Oppositionsbeobachtungen zur Verfügung, aus denen, wie es die Bahngeometrie erfordert, die einzelnen Bahnelemente zur Beschreibung der Planetenbahnen abgeleitet werden können. Wohl werden die Elemente wieder nacheinander bestimmt, diesmal aber, da die Diskussion über die Gestalt der Bahn abgeschlossen ist, wird die gegenseitige Abhängigkeit der Elemente offener als den Überlegungen und Rechnungen Keplers, so zwischen heliozentrischer Breite des Planeten und Entfernung zum Knoten oder zwischen Apsidenlage und mittlerer Bewegung. Beim Jupiter werden, abgesehen von Knoten und Neigung, die Elemente aus Orten symmetrisch zur großen Achse, d. h. in Abhängigkeit von der Apsidenlinie, bestimmt. Hier werden die Bahnörter vorübergehend als Funktion dreier Bahn-

elemente diskutiert. Überhaupt ist die Ableitung der Jupiterbahn verwickelter als die der Saturnbahn, obwohl es zunächst den Anschein hat, daß das reichhaltigere Beobachtungsmaterial und der größere Rechenaufwand bei der Beschreibung der Saturnbahn Rückschlüsse auf die Kompliziertheit der Verfahren zulassen könnten.

Meistens wird von Näherungswerten für die Bahnelemente ausgegangen, übernommen aus alten Tafeln oder rasch bestimmt aus wenigen, sorgfältig ausgewählten Beobachtungen. Sie werden dann schrittweise verbessert. Bei der Ableitung der Epochen — besonders deutlich für den Saturn — führt die detaillierte Behandlung der Differenzen zwischen Beobachtungswerten und den über die Näherungselemente errechneten Bahnörtern zu einem an moderne Zielsetzungen erinnernden Ausgleichsprinzip.

Physikalische Überlegungen, obwohl für das Modell von hervorragender Bedeutung, bleiben hier unberücksichtigt. Zwar diskutiert Kepler für die Jupiter-Bahn die Veränderlichkeit der Exzentrizität und für Saturn eine nicht konstante mittlere Bewegung, indem er eine säkulare Gleichung (*aequatio saecularis*) untersucht, geht dabei aber allein von den Beobachtungen aus und fragt nicht nach physikalischen Ursachen.

6. Bahnbestimmung von Venus und Merkur

Kepler kann von der Unterscheidung in innere und äußere Planeten bei der Bahnbestimmung nicht abgehen, um zu einem prinzipiell gleichen Verfahren für alle Planeten zu gelangen. Wie seine Vorgänger ist auch er zuallererst auf die Beobachtungen angewiesen, und — noch mehr als jene — hat er auf die Bahngeometrie und die wahren Verhältnisse der Bewegungen Rücksicht zu nehmen.

Bei den von der Erde aus in Nähe der Sonne erscheinenden inneren Planeten Venus und Merkur können, da ihre Bahnen innerhalb der Erdbahn liegen, Oppositionen nicht vorkommen. Es lassen sich dagegen untere Konjunktionen beobachten: die Planeten schieben sich auf der Verbindungslinie Erde — Sonne vor die Sonne. Aber auch diese Konstellationen sind für die alte Astronomie praktisch nicht beobachtbar, sie können allenfalls aus nicht zuverlässigen Beobachtungen der Planeten in Nähe der Sonne eingerechnet werden. Es nimmt daher nicht wunder, wenn sich die Verfahren zur Bestimmung der Bahnelemente auch bei Kepler von denen der Bahnbestimmung der äußeren Planeten unterscheiden und er — wie schon seine Vorgänger — solche Beobachtungen heranzieht, bei denen die Planeten ihre größten Abstände von der Sonne, die maximalen Elongationen, erreicht haben.

Ehe auf Keplers Verfahren eingegangen wird, soll kurz am Beispiel der Venus skizziert werden, wie Ptolemäus und Kopernikus vorgegangen sind (Fig. 7). Nach Ptolemäus liegen die Orter, für die Venus ihre größte Elongation als Abend- (1) und Morgenstern (2) erreicht, symmetrisch zur Apsidenlinie des Exzenters AP. Es sei ω die Länge des Apogäums des Exzenters, dann ist

$$\lambda = \omega + \varphi$$

die mittlere Länge von Z; sie ist gleich der Richtung des Epizykelmittelpunktes vom „punctum aequans“ Q aus und zugleich parallel zur Richtung ES, der mittleren

Länge der Sonne. ES ist aus der Sonnentheorie bekannt. Damit lassen sich die Winkel zwischen ES und den Tangenten E1 E2, den Richtungen größter östlicher und größter westlicher Elongation, bei gleicher Position des Epizykels bestimmen.

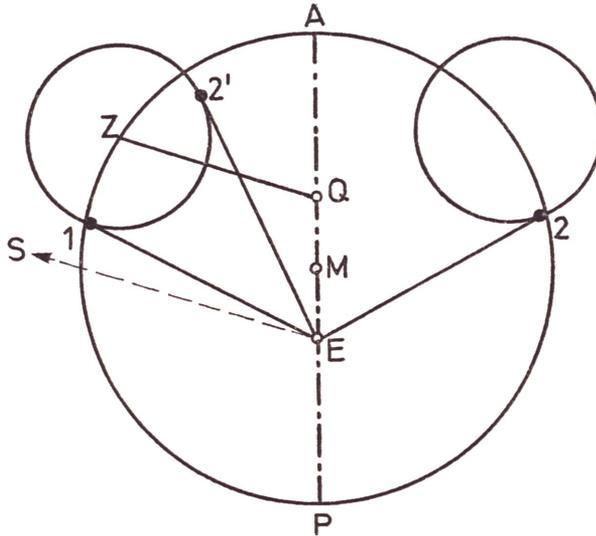


Fig. 7

Praktisch werden — bei gleich großen maximalen Elongationen — die Längen E1 und E2 beobachtet, in der Mitte liegt die Apsidenlinie. Für die weitere Untersuchung: Festlegung von Apogäum und Perigäum, Bestimmung der Exzentrizität des Exzenters EQ und des Halbmessers des Epizykels werden Beobachtungen maximaler Elongation herangezogen, bei denen der Epizykelmittelpunkt (mittlere Sonne) in die Apsiden zu liegen kommt.

Kopernikus ersetzt den Epizykel durch die Venusbahn und den Deferent durch die außerhalb der Venus liegende Erdbahn. Er schließt sich dem Ptolemäischen Verfahren weitgehend an und bestimmt, nachdem er den Radius des Ptolemäischen Epizykels in den Halbmesser der Venusbahn übergehen läßt, das Verhältnis der Durchmesser von Erd- und Venusbahn.

6.1 Venushandschriften

Kepler hinterläßt zur Bahnbestimmung der Venus ca. 220 Seiten³⁵, die er überschreibt: „Demonstrationis motuum VENERIS Rudimenta multiplicia“. Auch er geht von maximalen Elongationen aus, bestimmt aber sogleich — und hier wird die Grundlinie seines Verfahrens bereits deutlich — das Zeitintervall, das von gleichen Positionen Erde und Venus in ihren Bahnen begrenzt ist: 8 Sonnenjahre sind um einen Tag größer als 13 Venusjahre. Dazwischen liegen 12 Zeitpunkte,

für die die Venus nach einer Revolution um die Sonne in $224^d16^h48^m$ zur Ausgangsstellung zurückkehrt.

Nach einer Untersuchung der Venusparallaxe, die, gekoppelt an die Sonnenparallaxe, entschieden zu groß herauskommt, beginnt die Bahnbestimmung der Venus. Zentrale Bedeutung kommt dabei den Entfernungen Venus — Sonne zu. Sie werden berechnet, indem jeweils zwei, um ganze Venusumläufe auseinanderliegende Erdörter in Beziehung zu Sonne und Venus gesetzt werden. Kepler bedient sich damit eines in der „Astronomia Nova“ häufig angewandten Verfahrens.

Es seien

- B, C 2 Erdörter
- A Sonne
- D Venus.

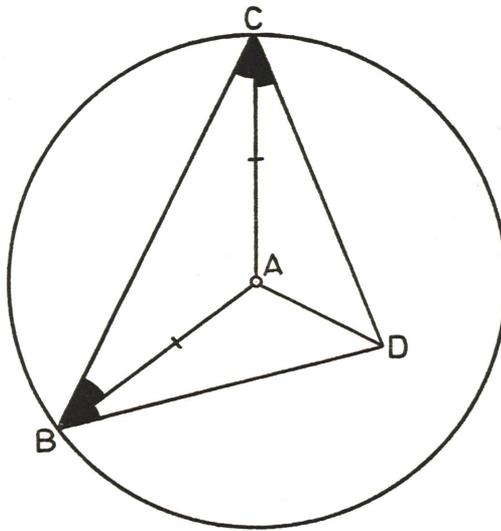


Fig. 8

Nacheinander lassen sich aus den durch die Sonnentheorie vorgegebenen und den beobachteten Werten in Fig. 8 die Stücke BC, BD und AD bestimmen.

Weitere Abstände der Venus von der Sonne erhält Kepler aus maximalen Elongationen, zu denen rechtwinklige Dreiecke Erde-Venus-Sonne gehören. So kommt Kepler zu einer Zusammenstellung von 9 heliozentrischen Venusörtern und ebenso vielen Entfernungen Venus — Sonne, die bereits Rückschlüsse auf Richtung der Apsidenlinie sowie auf Aphel- und Perihelentfernung erlauben. In Analogie zu Gedankengängen des Ptolemäus betrachtet er die Apsidenlinie als Symmetrielinie gleich großer Venusentfernungen.

In einer genaueren Untersuchung, die am exzentrischen Kreis angestellt wird, vergleicht er Projektionen exzentrischer Venusörter auf die Apsidenlinie miteinander und kommt zu folgender Überlegung:

Abstand MS, die Exzentrizität, ergibt sich aus der Proportion von der um den Perihelabstand SA verminderten Entfernung SD zum Abstand Projektion B des Bahnortes D vom Aphel A (Fig. 9). Also:

$$MS = \frac{SD - SA}{AB} .$$

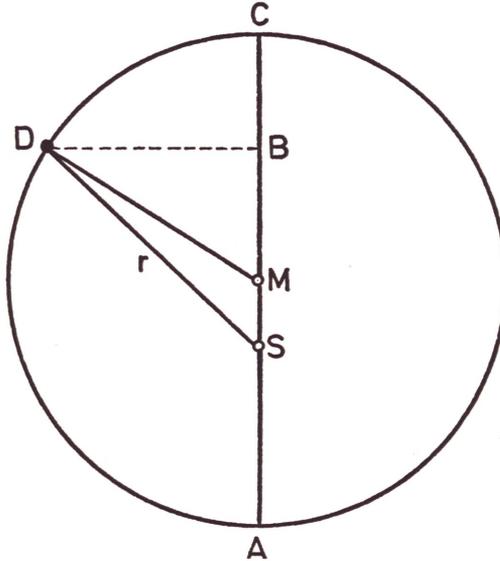


Fig. 9

$SD - SA$, die Schwankung zwischen beliebiger Planetendistanz und Perihelentfernung, ist der Entfernungstabelle der 9 Venusörter zu entnehmen. AB ist bekannt, wenn der Radius des exzentrischen Kreises gleich 1 gesetzt wird.

Die Gleichung für MS läßt sich nachprüfen. Zunächst werden gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} MS &= ae \\ SD &= r \\ SA &= a - ae \\ AB &= 1 + \cos E . \end{aligned}$$

Wird noch $r = a (1 + e \cos E)$ gesetzt, so geht die obige Gleichung für MS in die leicht nachprüfbare Gleichung über:

$$ae = \frac{a (1 + e \cos E) + ae - a}{1 + \cos E} .$$

Nacheinander wendet sich nun Kepler der Bestimmung der einzelnen Elemente zu in Untersuchungen, die er mit „Epichiremata“ bezeichnet, also mit Schlußfolgerungen, die nicht ganz streng verlaufen. Insgesamt werden 9 Epichiremata erläutert, von denen hier nur die wichtigsten im Prinzip wiedergegeben werden sollen.

Die *Neigung* wird über die Wendepunkte bestimmt (Epichiremata 4 und 5), die nach bereits bekannten Verfahren aus beobachteten Breiten in Nähe der Ekliptik ermittelt worden sind. Hält sich die Venus in einem der Wendepunkte auf, so ergibt sich mit den Entfernungen

$$\text{Sonne} - \text{Venus} = r$$

$$\text{Erde} - \text{Venus} = R$$

für die gesuchte Neigung i die Proportion:

$$\frac{\sin i}{\sin B} = \frac{R}{r} .$$

Kepler berechnet i für beide Wendepunkte getrennt und erhält als mittlere Neigung zwei um $1'$ auseinanderliegende Werte:

$$i_{\text{südlich}} = - 3^{\circ} 22' 30''$$

$$i_{\text{nördlich}} = + 3^{\circ} 21' 40'' .$$

Sie sind zum endgültigen Wert $3^{\circ} 22'$ zusammengefaßt.

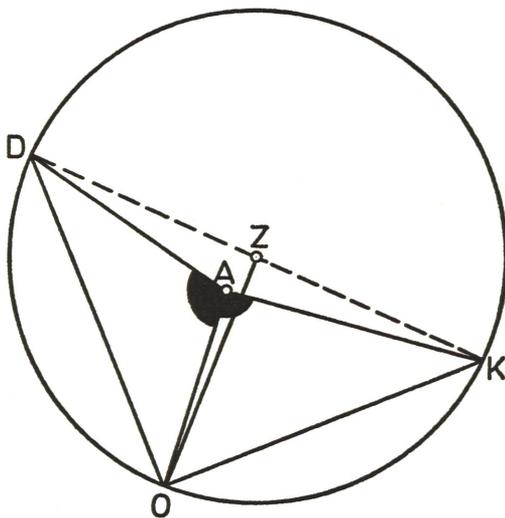


Fig. 10

Exzentrizität und *Aphel* werden zunächst im 7. Epichirema untersucht. Wiederum wird der exzentrische Kreis zugrunde gelegt. Ein Kreis wird durch 3 Punkte bestimmt, 3 Örter und ihre Entfernungen müßten also genügen, um die gesuchten Elemente abzuleiten. Es seien in Fig. 10:

A Sonne; D, O, K 3 Venusörter, von denen O, der mittlere Ort, in Nähe des Perihels liegt. Aus den Teildreiecken AOD und AKO wird Dreieck ODK festgelegt. Winkel DKO, Peripheriewinkel über der Sehne DO, bestimmt das Zentrum Z, das jetzt in der Mitte von DK angenommen wird und sich um $15'$ von der Linie OA entfernt. Der Radius läßt sich aus Dreieck DOZ leicht berechnen.

Im Epichirema 8 wird dieses Verfahren auf 4 Venusörter erweitert, und die zuvor abgeleiteten Werte werden korrigiert. Wieder ist die Bahnfigur der exzentrische Kreis.

Die Bestimmung der Epochen von *Knoten* und *Aphel* ist nicht zusammenhängend dargestellt. Es ist lediglich zu ersehen, daß — wie auch früher schon — Ptolemäische Angaben für den Vergleich mit Richtungen der Zeit Keplers herangezogen werden.

6.2 Merkurhandschriften

Die Bestimmung der Merkurbahn hat wegen der großen Exzentrizität der alten Astronomie erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Hinzu kommt, daß wegen der Sonnennähe Merkur seltener als andere Planeten und dazu noch ungenauer beobachtet werden konnte. Auch beim Merkur sind maximale Elongationen die Ausgangswerte. Keplers überlieferte Versuche, daraus die Bahnelemente abzuleiten, umfassen ca. 270 Seiten seiner Handschriften³⁶. Sie tragen die Überschrift: „Demonstrationis Motuum MERCURII Rudimenta omnifaria“. Diese „mannigfachen Voruntersuchungen“ beginnen — im Gegensatz zu allen übrigen hier erwähnten Bahnbestimmungen — mit der Analyse 16 alter, von Ptolemäus überlieferter Beobachtungen. Sie werden jetzt auf die wahre Sonne bezogen und stellen maximale Elongationen dar, so daß wie bei der Venus aus rechtwinkligen Dreiecken Erde — innerer Planet — Sonne die Abstände innerer Planet — Sonne berechnet werden können.

Für *Apsidenlinie*, *Halbmesser* und *Exzentrizität* erfolgt die Ableitung gemeinsam. Wegen der großen Exzentrizität wird als Bahnform sogleich die Ellipse zugrunde gelegt, zu deren erster Bestimmung zwei Werte aus der Liste Ptolemäischer Örtter und Entfernungen herausgegriffen werden.

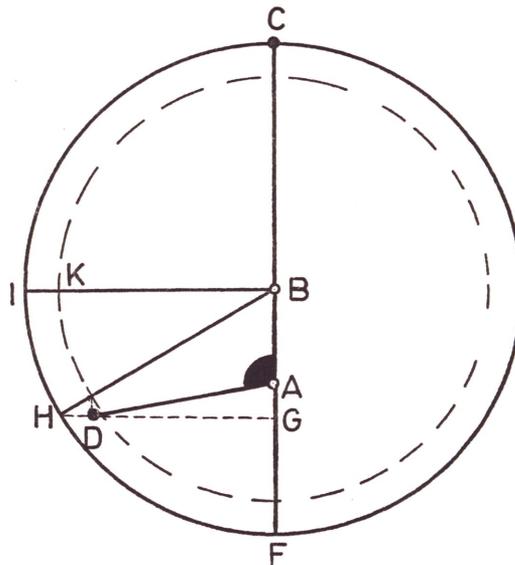


Fig. 11

Es seien:

C, D die gewählten Örter, von denen C im Aphel liege; ferner

CAF die große Achse und

IKB die kleine Halbachse.

Gegeben sind die Richtungen AC und AD sowie die Entfernungen AC und AD.

AC ist nun in B so zu teilen, daß die Proportion besteht:

$$CB : BA = BA : IK \text{ mit}$$

$$CB + BA = CA .$$

Werden gesetzt

$$CB = a$$

$$BA = ae$$

$$IK = a - b, \text{ so ergibt sich}$$

$$a(a - b) = a^2 e^2$$

$$= a^2 - b^2,$$

eine Beziehung, die näherungsweise richtig ist. Kepler löst die aufgestellte Verhältnisgleichung über die Proportion HG : HD, indem er auf Ellipsensätze, die er im Marswerk zusammengestellt hat³⁷, zurückgreift.

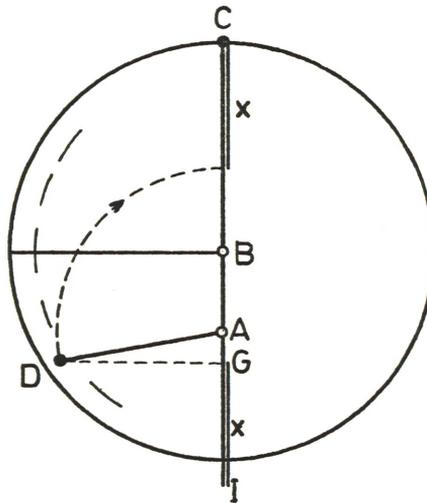


Fig. 12

Eine andere Bestimmung der Elemente a und e geht von der Differenz der Entfernungen $CA - AD$ aus. Wird diese Differenz von G über das Perihel hinaus bis I abgetragen (Fig. 12), so daß

$$x = GI = CA - AD \text{ ist,}$$

so berechnet sich laut Kepler BA nach:

$$BA = \frac{CA \cdot GI}{CI}, \text{ wobei}$$

der rechtsstehende Quotient nach den voranstehenden Ausführungen gegeben ist.

Diese Beziehung ist wiederum näherungsweise richtig, wie eine kurze Nachprüfung zeigt. Es sind:

$$BA = ae$$

$$CA = a + ae$$

$$GI = CA - AD$$

$$= a + ae - r = ae(1 - \cos E)$$

$$CI = CA + AG + GI$$

$$\text{mit } AG = -a(\cos E - e).$$

Eingesetzt in die Keplersche Bestimmungsgleichung für AB erhält man schließlich:

$$ae = \frac{(a + ae) ae (1 - \cos E)}{a + ae + a(1 - \cos E) - a(\cos E - e)}$$

$$ae = ae \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{(1 + e)(1 - \cos E) + 2e},$$

eine Gleichung, die für $E \neq 0$ um so besser stimmt, je kleiner e wird.

Im Zusammenhang mit diesen Überlegungen tauchen in den Handschriften algebraische Ausdrücke auf: ³⁸ Quadrate von Zahlen und Produkte von Strecken in allgemeiner Form, die durch Rechenzeichen getrennt sind. Hier findet sich eine der seltenen Stellen, in denen Kepler von den Vorteilen algebraischer Schreibweise, wie sie seit langem durch die Coss bereits eingeführt war, Gebrauch macht. Offenbar sind die Zusammenhänge in rein geometrischer Anschauung zu unübersichtlich geworden.

Es ist hier nicht möglich, noch auf die vielen anderen Versuche einzugehen, in denen Kepler die beschriebenen Verfahren variiert. Ein weiteres Verfahren sei indessen noch näher erläutert: die Bestimmung von Perihel, a und e aus 3 Bahnörtern ³⁹. Zu diesem Zweck berechnet sich Kepler wie früher aus Tychonischen Beobachtungen heliozentrische Merkurörter und deren Abstände von der Sonne. Die Örter werden so gewählt, daß Ort 1 (F) in Nähe des Perihels E liegt, Ort 3 (H) in Nähe mittlerer Länge und Ort 2 zwischen 1 und 3 zu liegen kommt. Die entsprechenden Projektionen auf die Apsidenlinie EA sind D , B , C . Die Lösung der Aufgabe geht nun folgendermaßen vor sich: Es seien S die Sonne und r_i die Abstände Sonne — Planetenörter. Werden gesetzt:

$$D_1 = r_3 - r_2$$

$$D_2 = r_3 - r_1,$$

dann muß die Beziehung bestehen:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{BC}{BD}.$$

Denn es ist, sofern AE die Richtung des Perihels ist, mit

$$r = a(1 + e \cos E)$$

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\cos E_3 - \cos E_2}{\cos E_3 - \cos E_1} = \frac{BC}{BD}.$$

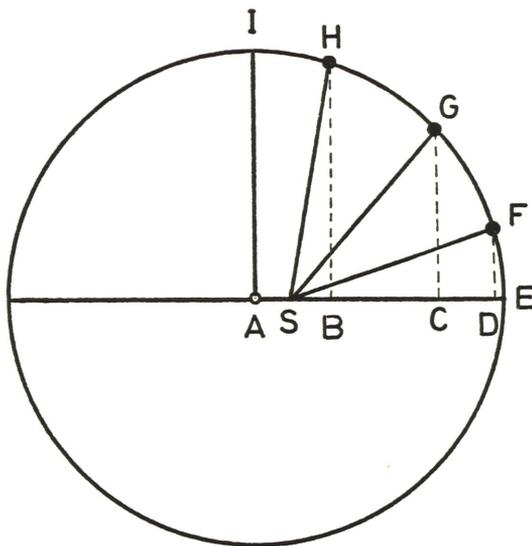


Fig. 13

Das Verhältnis $D_1 : D_2$ ist aus den Entfernungen bekannt. Die Richtung der Apsidenlinie ist so lange zu verändern, bis das Verhältnis $BC : BD$ diesem Wert gleichkommt. Als erste Näherung werden die Differenzbeträge der Bahnörter, Differenzen in wahrer Anomalie, genommen; es wird also H auf SG und SF projiziert. Nach mehreren Versuchen wird die Lage der Apsidenlinie entsprechend der obigen Verhältnisgleichung gefunden, indem für den Bogen IH nacheinander verschiedene große Werte eingesetzt werden. Zugleich ist durch die Beziehungen zwischen Abschnitten auf der Apsidenlinie und Radiendifferenzen („librationes“) der Weg vorgegeben, nach dem Exzentrizität und mittlerer Abstand bestimmt werden können. Die libratio braucht nur auf den Radius $AE = 1$ bezogen zu werden, um die Schwankung zwischen Apsidenentfernungen und großer Halbachse zu erhalten. Der 3. Radius $SH = r_3$ ist mit der libratio von AB auf $SI = a$ zu verbessern.

Kepler hat also durch Iteration die exzentrische Anomalie bestimmt, um der Ausgangsgleichung zu genügen. Die unbekanntenen E_i wurden zunächst durch Differenzen in wahrer Anomalie Δv_i ersetzt und dann schrittweise verbessert. Kepler hat damit die transzendente Gleichung

$$\frac{\cos(A + x) - \cos x}{\cos(B + x) - \cos x} = C$$

gelöst, worin die Größen $A = \Delta v_2$

$B = \Delta v_1$

$C = \frac{BC}{BD}$ bekannt sind und x gesucht wird.

Soviel zu diesem Verfahren.

Insgesamt hat Kepler 6 verschieden große Werte für die Exzentrizität erhalten, die um maximal 10% differieren. Darunter ist ein Wert, erhalten aus Ptolemäischen Beobachtungen, dem Kepler offenbar besonderes Gewicht beimißt, der aber merklich größer als die anderen Zahlen ist. Hätte er diesen Wert nicht weiter berücksichtigt und das Mittel aus den übrigen Ergebnissen für die endgültige Größe der Exzentrizität genommen, wäre er dem tatsächlichen Wert wesentlich näher gekommen.

Die Ableitung von *Neigung* und *Knoten* unterscheidet sich von früheren Verfahren bei anderen Planeten nur unwesentlich. Die Neigung wird aus beobachteten Breiten nach dem Tangens-Satz der ebenen Trigonometrie über die Entfernungen Erde — Sonne und Merkur — Sonne berechnet, die Knotenlage aus heliozentrischen Breiten bei bekannter Neigung (Umkehrung des Verfahrens c) von Abschnitt 3.3).

Für die Bestimmung der *Epochen* werden insgesamt 17 alte Beobachtungen herangezogen, darunter 9 Ptolemäische Beobachtungen. Am Schluß der Merkurhandschriften⁴⁰, vielleicht am Ende der Bahnbestimmungen überhaupt, — Kepler teilt das Datum mit: es ist der 22. Dezember 1625 — diskutiert er die Hypothese des „dies creationis“ für den Merkur. Er kommt in Verbindung mit den alten Beobachtungen zu Ergebnissen, „quae nos ad fontes motuum $0 \vee, 0 \odot$ ducunt“, wie er schreibt. Diese Werte sind die Richtungen von mittlerer Bewegung und Aphel am „dies creationis“, die in das Tafelwerk übernommen werden.

6.3 Vergleich der Bahnbestimmung von Venus und Merkur

Physikalische Überlegungen spielen wie bei Jupiter und Saturn keine Rolle. Ausgang sind die Bahngeometrie und die Beobachtungen. Darin hat sich, formal gesehen, bei der Bahnbestimmung auch durch Kepler nichts geändert. Kommen bei den äußeren Planeten als Beobachtungen vor allem Oppositionen als Grundlage weiterer Untersuchungen in Betracht, so sind es hier Konstellationen, in denen Venus und Merkur die größten Abstände von der Sonne für den Beobachter auf der Erde erreicht haben. Aus diesen maximalen Elongationen leitet Kepler als weitere Ausgangswerte die Entfernungen zwischen Planeten und Sonne ab, sei es, daß er von dem aus dem Marswerk her bekannten Kunstgriff gleicher Planetenstände bei verschiedenen, um ganze Venus- bzw. Merkurläufe auseinanderliegenden Erdörter Gebrauch macht; sei es, daß er die rechtwinkligen Dreiecke Erde — Planet — Sonne betrachtet. Die Sonnentheorie liefert die hierzu erforderlichen Angaben über Sonnenstand und Entfernung Erde — Sonne. Damit ist auch die Beschreibung der Bewegung innerer Planeten an die Sonnentheorie gebunden.

Ist bisher das Material für die Bahnbestimmung beider Planeten in etwa gleicher Weise zusammengetragen, so erfolgt in der Berechnung der Elemente eine deutliche Trennung. Wie bei der Bestimmung der Sonnenbahn in der „Astronomia Nova“ wird als Bahn der Venus der exzentrische Kreis zugrunde gelegt. Dieses Vorgehen rechtfertigt sich durch die geringe Größe der Exzentrizität. So sind die „Epichiremata“ Versuche zur Bahnbestimmung am exzentrischen Kreis.

Anders beim Merkur. Hier wird die Bahnellipse verwendet, und es werden Ellipsensätze zur Ermittlung von Exzentrizität und großer Halbachse aus dem

Marswerk herangezogen. Keplers Bemühungen, die Bahnelemente aus drei Orten und ihren Entfernungen zu berechnen, zeigen am ehesten Anklänge an neuere Verfahrensweisen. Dennoch ist Kepler nicht analytisch vorgegangen. Zaghafte Versuche, arithmetische Ausdrücke zu verwenden, lassen sich im Nachlaß vor allem in den Merkurhandschriften finden. Die genauere Sichtung und ausführliche Bearbeitung dieser Manuskripte dürften neben der Bearbeitung der Handschriften zum Marswerk die wertvollsten Aufschlüsse über Keplers Verfahren bei der Beschreibung der Planetenbewegung erbringen.

7. Chronologie der Bahnbestimmung

Im Kepler-Nachlaß finden sich zu den Berechnungen einzelner Bahnelemente auch hin und wieder Datierungen, die ein ungefähres Bild darüber ergeben, wann Kepler an den verschiedenen Details seiner Bahnbestimmung gearbeitet hat. Sicherlich ist damit nicht lückenlos ein Tagebuch Keplers über seine Planetenberechnungen gewonnen, aber es handelt sich um authentische Daten, die allgemein gehaltene Angaben über Zeitpunkt und Dauer der Vorarbeiten zu den „Tabulae Rudolphinae“ zum Teil wenigstens ersetzen können.

Chronologie der Bahnbestimmung

Datum	Merkur	Venus	Sonne	Mars	Jupiter	Saturn
1600 Juli 1601 Nov. 1603 Sept.				exzentr. Kreis Oval- hypoth. a, e		
1605 Mai						
1609 Nov. 1614 Jan. 1614 Sommer	Aphel, e			Epochen		
		Aphel, e, a, i, ∞	Tab. Aeq.			
1614 Dez. 1615 März vor 1616	Aphel, e e				Aphel, e a, e a, e	a, e
1616 1616 Sept. 1616 Okt.	Aphel, e, a, ∞ Epochen					
1617						
1622 Sommer 1622 Herbst 1624 Frühjahr 1624 Sommer	Epochen	Epochen Epochen	Epochen Epochen	Epochen Epochen	Epochen Epochen Epochen Epochen	Epochen Epochen, a Aequatio Saecul.
1625 Dez.	Epochen					

Es bedeuten:	
a	große Halbachse
Aequatio Saecul.	Diskussion der Veränderlichkeit der mittleren Bewegung
Aphel	Richtung des Aphels und der Apsidenlinie
e	Exzentrizität
Epochen	Bestimmung von Aphel- und Knotenbewegung sowie der mittleren Planetenbewegung in Abhängigkeit von der Zeit aus alten Beobachtungen; z. T. ist auf die Hypothese des „dies creationis“ eingegangen.
i	Neigung
∞	aufsteigender Knoten und Richtung der Knotenlinie
Ovalhypoth.	die vorübergehende Hypothese im Marswerk, die wahre Bahn des Planeten sei ein Oval
Tab. Aeq.	Tafel der Gleichungen, berechnet über e

Nach diesen Eintragungen Keplers sind die Arbeiten am Marswerk 1605 beendet, die Bahnbestimmung des Mars aber ist noch 1624 mit der Diskussion der Epochen im Gange. Die Sonnenbahn ist mit der Ausarbeitung der „Tabulae Aequationum“ bereits im November 1601 beschrieben, während die Diskussion der mittleren Bewegung erst gegen 1624 abgeschlossen wird.

Der erste Planet, dessen Bahn und Bewegung außerhalb des Marswerkes analysiert wird, ist Merkur. Hier hat Kepler besonders viel Mühe auf die Ableitung der Bahnelemente verwandt; bis zur Weihnachtszeit 1625 ziehen sich seine Berechnungen hin. Die Venusbahn wird praktisch in einem Anlauf der 9 Epichiremata im Sommer 1614 bestimmt, lediglich 1624 werden noch Ergänzungen vorgenommen.

Für Jupiter und Saturn reicht die Zeit der Bearbeitung von ca. 1616 bis 1624.

Hiernach ergibt sich also für die Bahnbestimmung diese zeitliche Reihenfolge: zuerst sind die Bewegungen von Sonne und Mars, dann die der Venus analysiert und ihre Bahnen daraus abgeleitet worden. An Merkur, Jupiter und Saturn hat Kepler längere Zeit gleichzeitig gearbeitet. Kurz vor Fertigstellung der Tafeln wurden im Frühjahr 1624 die Epochen aller Planeten überprüft oder verbessert.

8. Genauigkeit der Bahnbestimmung

Für die Abschätzung der Genauigkeit der Ergebnisse Keplers kommen im wesentlichen zwei Verfahren in Frage: einmal können die Rechnungen selbst anhand moderner Ausgleichsverfahren überprüft und aus den Differenzen zu den Ergebnissen Keplers Rückschlüsse auf die *innere* Genauigkeit gezogen werden; zum anderen, wenn für den Vergleich moderne Werte verwendet werden, sind Hinweise auf die *absolute* Genauigkeit gegeben. Dieses Verfahren hat O. Gingerich für die Prüfung der „Tabulae Rudolphinae“ herangezogen. Er hat geozentrische Planetenörter nach Kepler mit modernen Tafelwerten verglichen und vorhandene Differenzen in einer knappen Diskussion aus einigen ungenau bestimmten Bahnelementen zu erklären versucht.⁴¹

Die genauere Analyse steht indessen noch aus und soll an dieser Stelle als Abschluß der vorliegenden Arbeit unternommen werden. Für den Vergleich mit den Ergebnissen Keplers werden die Elemente von Leverrier-Gailott herangezogen, wie sie bei Tuckerman abgedruckt sind.⁴²

Zunächst werden Ergebnisse aus Stichprobenrechnungen einiger geozentrischer Planetenörter, die mit Tuckerman-Werten verglichen sind, angeführt. Es sind Differenzen Kepler-Tuckerman in Minuten, nach Länge und Breite getrennt, angeführt. Uhrzeit ist 16^h U. T.

Datum			Differenzen in										
Jahr	Monat	Tag	Länge						Breite				
			☉	♃	♅	♂	♀	♁	♂	♀	♁	♂	♀
1401	Januar	7	+4	-37	+17	+1	-6	-18	+8	0	-1	-1	-1
1401	August	5	-3	-46	+17	0	+16	-4	-2	0	0	+1	+2
1501	Januar	2	0	+16	-40	0	-10	-11	-2	+1	0	0	-3
1501	August	10	-5	-43	-36	-3	+8	-1	-4	+1	0	0	-5
1601	Januar	7	+4	-6	-3	-1	+4	+29	+3	0	0	-1	-4
1601	Juli	6	-3	-9	-3	-2	-22	-20	+3	0	+3	0	-1
1649	Januar	5	+2	-32	-11	-3	+2	+11	-3	+7	-1	0	-1

Die Breiten sind also durchweg genauer dargestellt als die Längen. Die genaueste Bahnbestimmung ist Kepler — wie sich bei dem Vergleich der Bahnelemente bestätigen lassen wird — offenbar für den Mars gelungen. Hier liegen die Fehler innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit. Auch für die Sonne sind die günstigsten Werte erreicht, denn hier spielt die um etwa 3' zu große Parallaxe mit herein. Saturn und Jupiter sind um ca. 30' ungenau, werden aber für die Zeit um 1600 merklich genauer — gerade entgegengesetzt bei den Planeten Venus und Merkur.

Die Ursachen dieser Differenzen sind in den ungenau bestimmten Bahnelementen zu suchen, und auf sie soll im folgenden näher eingegangen werden. Die Epochenwerte beziehen sich, wenn nicht anders ausdrücklich erwähnt, auf 1600 compl., die übrigen Elemente auf die Zeit um 1600.

a) große Halbachse

	Kepler	modern
☉	1.000 00	1.000 00
♃	9.510 00	9.554 73
♅	5.200 00	5.202 80
♂	1.523 50	1.523 68
♀	0.724 14	0.723 33
♁	0.388 06	0.387 10

Am ungenauesten ist die Halbachse für die Saturnbahn bestimmt, obwohl Kepler gerade hier mehrere Verfahren angewandt und viele Beobachtungen herangezogen hat.

Für die großen Fehler in den geozentrischen Längen kann a aber kaum verantwortlich gemacht worden, wie die folgende Untersuchung zeigt.

Exploratio motus nodorum
Mercurij

Anno 1491. 26 Augustij per armillas, loco
Aldebaran collocato in 2°. 35' X, repertus est ♄ in
23°. 10' O, absque latitudine. hora iua ante ortum
Solis. Observator Baltherus.

Ex Breuo locus Solis

1480	3. 4. 9.45	9. 19. 59.45	Fixa anno 1600
10.	7. 30	11. 29. 35. 3.	4. 12. 30 X
Simpl: Iulius		6. 28. 57.26	
D: 24		23. 39. 20.	Aifer
H 16		39. 26.	pro 100 1. 25.
			pro 9 7. 39
			Mens. 4 17
	3. 4. 17.15	5. 12. 51. 0.	
		3. 4. 17.15	
		2. 8. 33.45.	
		1. 52. 39.	
		26	
		3	
		2. 6. 40. 37.	Ergo ♄ in 23°. 15' O.
		5. 10 57 52	correctione fixae
		○ 10.58. m̄.	Sine latitudine.

Mercurij aliqua potuit esse refraction, iude
sine ea ostendimet lat: meridianam paucorū
scriptilorum: quod tamen est incertum.

Elongatio

○ 10.58 m̄
♀ 23.15 O
17.43

Die 30 Augustij inventus est in 27°. 10' O,
tantūdem progressis, quantum Sol. Et die 31
jam minus 7 minutis, at augetur ejus motus.

Anno 1491	Aug	Die 26. in 23. 10 O	diurnis
		30. 27. 10	1. 0. quater
1608		31. 28. 3.	0. 53.
117	Sep	2 1. 13. m̄	1. 35. bis
1491		3 3. 5	1. 52.
130		9 13. 23	1. 43. sexies
1621		11. Apparuit	
13			
8			

Quid si sic legam

Aug 26.	23. 10 O	diurnis
30.	27. 10	1. 0. quater
31.	28. 30	1. 20.
2	1. 30 m̄	1. 30. ter
3.	3. 5	1. 35.
9.	13. 23	1. 43. sexies

Ephemerides anno 1608 Augusti non ferunt
hanc motus analogiam.

Explotatio motus nodorum
Mercurij

47 53

Anno 1491. 26 Augustij per armillas loco
Aldebaran collocato in 2. 35 III, reperitur in
23. 10 d. absp. latitudine. hora vna ante ortu
Solis. Observator Waltherus.

Ex Embeo locus Solis

1490	7. 4. 9. 45	9. 19. 59. 45	Fixa ad 1600
10.	7. 30	11. 29. 35. 3.	4. 12. 30 III
Simplex		6. 28. 57. 26.	
100: 24.		23. 39. 20.	
# 16		39. 26.	
	3. 4. 17. 15.	5. 12. 51. 0.	
		3. 4. 17. 15	
		2. 8. 33. 45.	
		1. 52. 39.	
		10. 58. 17.	
		10. 58. 17.	
		10. 58. 17.	

Ex 100 | 1. 24
9 | 5. 39
4 | 17

2. 39. 34. III

Ergo in 23. 10 d.
ab Aldebaran
Sine latitudine.

Mercurij aliqua potuit esse refractio, unde
Sine ea ostendit esse lat. meridianaam pueri
non semper potuit: quod tamen est incertum.

Elongatio 10. 58. 17.
23. 15 d.
17. 43.

Die 30 Augustij in vasis est in 23. 10 d
latitudinem magnitudinis, quantum sol. Et die 31
jam minut 7 minutis ab Aldebaran.

Anno 1491
1008
117

	26.	23. 10 d	1. 0. 4. 10. 10
	30.	27. 10	0. 53.
Sop	31.	28. 3.	1. 35. 65
	2	1. 13. 17	1. 50.
	3	3. 5.	1. 43. 10. 10
	9	13. 23	
	11.	Apparuit	

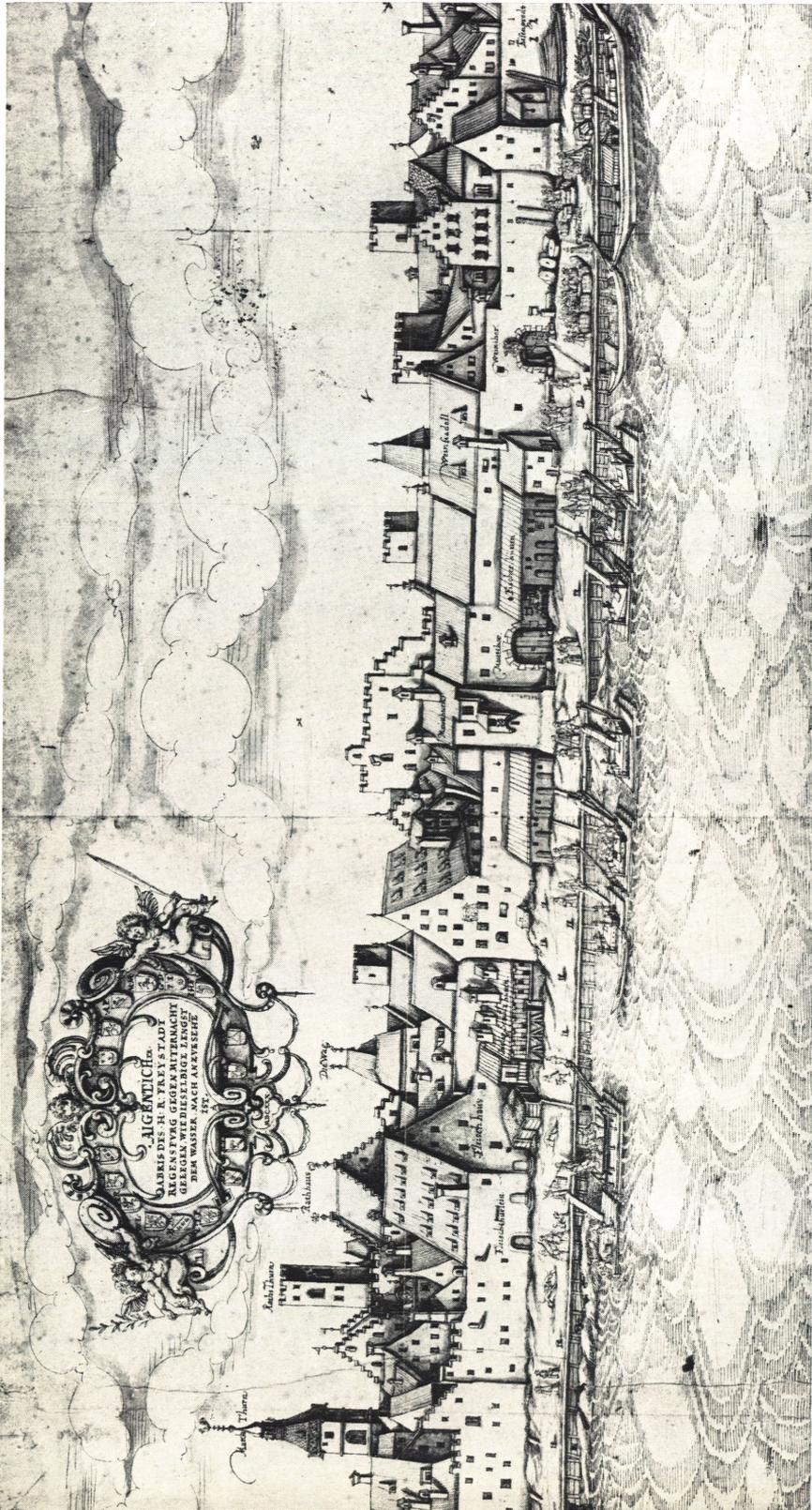
Quid si sic legam	23. 10 d	1. 0. 4. 10. 10
26.	27. 10	1. 20.
30.	28. 30	1. 30. 10.
31.	1. 30 17	1. 35.
2	3. 5	1. 43. 10. 10.
3	13. 23	

Epheemeris ad 1600 Augustij non ferretur
hanc motus analogiam.

S. 130 Übertragung einer gut lesbaren Seite der Kepler-Manuskripte Pulkowo astronomischen Inhalts mit der Überschrift: Die Bestimmung der Knotenbewegung von Merkur.

Aus einer Merkurbeobachtung von Walther aus dem Jahre 1491 versucht Kepler über die Sonnentafel von Tycho Brahe die Konjunktion zwischen Merkur und Sonne zu berechnen.

S. 131 Reproduktion der Originalseite von Johannes Kepler. (Zum Aufsatz von V. Bialas).



Die Donaulände beim Sterbehaus im Jahre 1630, nach Zeichnung von J. G. Bahre
 (zu: Das Kepler-Gedächtnishaus in Regensburg, von W. Boll, Seite 166)



Das Kepler-Gedächtnishaus (mit dem Erker) und das Haus „Zum Blauen Hecht“
(zu W. Boll, S. 166) (rechts mit Turm)



Treppenanlage im I. Stock (zu W. Boll, S. 166)

Die geozentrischen Örter λ werden nach den „Tabulae Rudolphinae“ über die heliozentrischen Längen L und die Bahnprosthaphaere P nach $\lambda = L - P$ berechnet.

P läßt sich über die Kommotation S und den Hilfswinkel x nach

$$P = 0.5 S - x \text{ bestimmen mit}$$

$$\tan x = \frac{r - R}{r + R} \tan \frac{S}{2} .$$

Läßt man nun allein r variabel sein und

untersucht die Abhängigkeit $\frac{d\lambda}{dr}$, so erhält man:

$$d\lambda = dx = \frac{d}{dr} \left(\frac{r - R}{r + R} \right) \tan \frac{S}{2} \cos^2 x$$

$$d\lambda = \left(\frac{1}{r + R} - \frac{r - R}{(r + R)^2} \right) dr \tan \frac{S}{2} \cos^2 x .$$

Für Saturn ist $r - R \approx 8$
 $r + R \approx 10$

und $\tan \frac{S}{2} \approx 1.25 \tan x$.

Damit wird $d\lambda \approx \frac{1}{80} dr \sin 2x \approx \frac{1}{80} dr$, mit $dr = 0.04473$

$$d\lambda \leq 0.0006 \triangleq 2' .$$

Der Fehler in a beim Saturn bewirkt also allenfalls einen Längenfehler von $2'$.

b) Exzentrizität

	Kepler	modern
☉	0.018 00	0.016 88
♃	0.057 00	0.056 81
♄	0.048 22	0.047 84
♅	0.092 65	0.093 02
♆	0.006 92	0.006 98
♇	0.210 01	0.205 56

Die säkularen Änderungen der modernen Werte für e sind gering. Sie bleiben — in Bogenmaß gerechnet — deutlich unter $1'$, nur beim Saturn wird der Betrag von $71''$ in 100 Jahren erreicht.

Es wird deutlich, daß die Längendifferenzen bei Sonne und Merkur vor allem von der ungenauen Exzentrizität herrühren. Bei der Sonne macht diese Ungenauigkeit in der Mittelpunktsgleichung für $E = 90^\circ$ maximal $8'$, beim Merkur maximal $30'$ aus. Enttäuschend ist dieses Ergebnis besonders für Merkur, wenn man die Anstrengungen bedenkt, die Kepler auf die Bestimmung der Exzentrizität dieses Planeten verwendet hat.

c) *mittlere Bewegung*

	Bezugsrichtung für 1600 compl.		pro Julianisches Jahr	
	Kepler	modern	Kepler	modern
☉	290° 55'	290° 54'	360° 0' 26",60	27",70
♃	208. 27	208. 44	12.14 5, 64	6, 36
♄	160. 45	160. 39	30.21 47, 06	46, 87
♅	307. 45	307. 15	191.25 0, 10	1, 07
♀	352. 23	352. 19	585.11. 38, 14	31, 66
♁	66. 47	66. 51	1494.44. 38, 12	26, 61

Die Bezugsrichtungen der mittleren Bewegung, die anzeigen, wo sich die mittleren Planetenörter am 1. Januar 1601 mittags befanden, zeigen für Sonne und Mars gute Übereinstimmungen. Der Saturn hält sich nach Kepler um $17'$ vor seinem tatsächlichen mittleren Ort auf. Die mittleren Bewegungen pro Julianisches Jahr (gleich $365^d.25$) sind nur bei den inneren Planeten etwas weniger genau bestimmt; hier wachsen die Differenzen zu den richtigen Werten in 100 Jahren auf ca. $11'$ bei der Venus und gar auf $19'$ beim Merkur an. So vor allem erklärt es sich, daß beim Merkur um 1600 die großen Längendifferenzen für mittlere Bahnörter durch die fehlerhafte Exzentrizität verursacht werden, während dieser Betrag um 1500 durch die größere mittlere Bewegung wieder z. T. kompensiert wird.

d) *Apfel*

	Bezugsrichtung für 1600 compl.		Bewegung in 100 Jul. Jahren	
	Kepler	modern	Kepler	modern
☉	95° 44'	95° 25'	1° 42' 43"	1° 43' 4"
♃	264. 58	265. 11	2. 6. 8	1. 57. 30
♄	186. 52	187. 54	1. 18. 38	1. 36. 36
♅	149. 0	148. 43	1. 51. 35	1. 50. 25
♀	301. 14	306. 02	2. 10. 5	1. 22. 20
♁	252. 50	251. 15	2. 54. 42	1. 33. 12

Die Apsidenrichtungen sind auf etwa 1° genau bestimmt, nur die Venus hat ein um etwa 5° falsches Aphel. Dieser Fehler hat trotz der geringen Exzentrizität einen merklichen Einfluß auf die Genauigkeit der Bahnbeschreibung. Es ist

$$\begin{aligned} M &= E + e \sin E \\ dM &= dE + e \cos E dE \\ dM &= dE (1 + e \cos E). \end{aligned}$$

Der Betrag dE entspricht einer Apheländerung von $-dE$ und erreicht seine größten Werte in den Apsidenpunkten. Mit $dE = 5^\circ$ wird für $E = 0, 180^\circ$ und $e = 0.007$

$$\begin{aligned} dM &= 5^\circ 2'. \text{ Die Differenz in der Mittelpunktsgleichung wird} \\ dA &= 2 (dM - dE) \\ dA &= 4' . \end{aligned}$$

Dieser Fehler wächst, wenn auf 1500 oder 1400 zurückgegangen wird, aufgrund der ungenau bestimmten Apheländerung weiter an.

Beim *Mercur* beträgt der Unterschied in der Apsidenrichtung 1600 $1^\circ 35'$ und 1500 nur noch $7'$.

Für die Zeit um 1600 wird

$$\begin{aligned} dM &= 95' (1 + 0.21) \\ dM &= 114' \\ dA &= 38' . \end{aligned}$$

Hier also ist die zweite Ursache für die großen Ungenauigkeiten der Merkur-Orter um 1600 zu finden.

Beim *Jupiter* erreicht dA für 1600 $6'$ und nimmt für Jahrhunderte vor 1600 etwas ab. Bei den übrigen Planeten spielen die Differenzen im hier betrachteten Zeitraum keine merkliche Rolle.

e) Neigung

	Kepler	modern
♃	$2^\circ 32' 0''$	$2^\circ 30' 15''$
♄	1. 19. 20	1. 19. 33
♅	1. 50. 30	1. 51. 8
♀	3. 22. 0	3. 23. 24
♁	6. 54. 0	6. 59. 52

Die Neigungen sind — mit Ausnahme von Merkur — innerhalb von $2'$ genau bestimmt. Die Differenz bei Merkur von $6'$ erklärt sich aus den ungleich unzuverlässigeren Beobachtungen dieses Planeten. Rückschlüsse auf vorhandene, aber geringe Fehler in der Breitendarstellung sind bei der geringen Änderung der Neigung — maximal bei der Bahnebene des Jupiter um $21''$ in 100 Jahren — nicht zu ziehen.

f) Knotenlinie

	Richtung für 1600 compl.		Bewegung in 100 Jul. Jahren	
	Kepler	modern	Kepler	modern
♃	111° 0'	110° 11'	1° 59' 5"	0° 52' 24"
♄	95. 26	96. 25	5. 50	1. 0. 38
♅	46. 45	46. 28	1. 6. 15	0. 46. 37
♆	73. 1	73. 3	1. 18. 20	0. 54. 51
♇	42. 25	43. 35	2. 22. 4	1. 11. 25

Die Knotenlinie ist also für Saturn, Jupiter und Merkur für die Zeit um 1600 auf etwa 1° genau bestimmt, für Mars und Venus wesentlich genauer. Für 1500 wächst dieser Fehler bei Saturn und Merkur aufgrund der ungenauen Knotenbewegung auf ca. 2° an, während er beim Jupiter nahezu verschwindet. Aus diesen Differenzen lassen sich im wesentlichen die Fehler in der Breitendarstellung erklären.

Es ist

$$\tan b = \tan i \sin (L - \Omega)$$

$$db = - \tan i \cos (L - \Omega) \cos^2 b d \Omega.$$

Mit $\cos^2 b \approx 1$ wird

$$db \approx - \tan i \cos (L - \Omega) d \Omega$$

$$|db| \leq \tan i d \Omega .$$

Beispielsweise wird für Jupiter mit $i = 1^\circ 19'$ und mit $d \Omega = 2^\circ$

$$db = 2' 30'' \text{ für } 1500.$$

Damit ist der Vergleich zwischen den Elementen Keplers und modernen Werten beendet. Die in den Handschriften diskutierte Veränderung der mittleren Bewegung beim Saturn (aequatio saecularis) und die langsame Änderung der Exzentrizität beim Jupiter sind nicht in das Tafelwerk übernommen.

Zusammenfassung:

Die Ungenauigkeiten der Planetenörter lassen sich aus fehlerhaften Bahnelementen im einzelnen erklären. Die Breitendarstellung ist wesentlich genauer als die Längendarstellung. Hier sind die Beobachtungen am zuverlässigsten und die Verhältnisse am einfachsten zu beschreiben. Für Fehler in Breite sind vor allem Ungenauigkeiten der Knotenbestimmung verantwortlich. Lediglich beim Merkur macht sich ein 6'-Fehler in der Neigung bemerkbar.

Die Fehler in Länge sind bei den einzelnen Planeten durch folgende fehlerhafte Bahnelemente verursacht:

bei der *Sonne* durch Exzentrizität, zum geringen Teil durch die mittlere Bewegung;
 beim *Saturn* durch die Bezugsrichtung der mittleren Bewegung, zum geringen Teil — bei geozentrischen Örtern — durch die große Halbachse;
 beim *Jupiter* gleichermaßen durch die Bezugsrichtungen von mittlerer Bewegung und Aphel.

Für die Darstellung der Bahn des *Mars* sind die Elemente am genauesten bestimmt worden, entsprechend klein sind die Fehler der Planetenkoordinaten.

Bei der *Venus* sind die Fehler in Länge gleichermaßen auf die ungenaue mittlere Bewegung und Apsidenlinie zurückzuführen.

Beim *Merkur* schließlich sind an den Fehlern vor allem Exzentrizität und Aphelrichtung, in geringerem Maße mittlere Bewegung und Aphelbewegung beteiligt. Dabei ist in mittleren Längen mehr die Exzentrizität, in Längen in Nähe der Apsidenlinie mehr die Aphelrichtung wirksam.

Keplers quantitative Beschreibung der Planetenbewegung hat sicherlich durch die Verwendung zeitlich veränderbarer Bahnellipsen und durch die eingehende Analyse der z. T. hervorragenden Beobachtungen bessere Ergebnisse in der Bahnbestimmung erbracht als jemals zuvor. Es ist Kepler gelungen, die Bahnebenen im Raum sehr genau zu bestimmen. Die Bahnen sind — vom Merkur abgesehen — dadurch charakterisiert, daß ihre Größe und Form (Krümmungsverhältnisse) besser mit der Wirklichkeit übereinstimmen als ihre Lage in den Ebenen und die Bewegung der Planeten.

Kepler hat mit der Veröffentlichung der Ergebnisse seiner Bahnbestimmung in den „*Tabulae Rudolphinae*“ den Auftrag Kaiser Rudolfs II. von 1601 erfüllt, zugleich aber sein Lebenswerk wenige Jahre vor seinem Tod vollendet.

Anmerkungen

- 1 „*Il Saggiatore*“, 1623.
- 2 An Michael Mästlin, 19. April 1597. Johannes Kepler Gesammelte Werke (KGW), Bd. XIII, Briefe 1590—1599. München 1945.
- 3 Tycho Brahe an Michael Mästlin. Abgedruckt in: Johannes Kepler in seinen Briefen. Herausgegeben von M. Caspar und W. von Dyck. Bd. I. München und Berlin 1930.
- 4 An Herwart v. Hohenburg, 12. Juli 1600. KGW XIV, Briefe 1599—1603. München 1949.
- 5 Vgl. hierzu M. List: Der handschriftliche Nachlaß der Astronomen Johannes Kepler und Tycho Brahe. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe E, Heft Nr. 2. München 1961.
- 6 Dieser Teil des Nachlasses wird heute als Kepler-Mss. Pulkowo zitiert.
- 7 *Almagest* XI, 1.
- 8 *De Revolutionibus* V, 15 u. 19.
- 9 *Astronomia Nova*, Buch II, Kapitel 11 (AN II, 11). In der Übersetzung von Max Caspar. München und Berlin 1929.
- 10 AN II, 12.
- 11 AN V, 61.
- 12 AN II, 13.
- 13 AN V, 62.
- 14 AN II, 19.
- 15 AN II, 17.
- 16 AN V, 68.
- 17 AN V, 69.
- 18 AN III, 24 u. 26.
- 19 AN III, 25.
- 20 Kepler-Mss. Pulkowo Bd. 14, Bl. 66 (KMP 14, 66).
- 21 KMP 14, 66^v.

- 22 Diese Hilfstafel hat offenbar große Ähnlichkeit mit einer Tafel in der „Astronomiae pars optica“, die er sich für einen anderen Zweck berechnet hatte (KGW II, München 1939, S. 240).
- 23 KMP 14, 203.
- 24 KMP 14, 293.
- 25 KMP 14, 294v.
- 26 KMP 14, 386 u. ff.
- 27 KMP 14, 409 u. ff.
- 28 KMP 14, 444.
- 29 KMP 14, 143.
- 30 „Nova Kepleriana — Neue Folge“, Bayerische Akademie der Wissenschaften, München.
- 31 KMP 13, 339v u. ff.
- 32 KMP 13, 338 u. ff.
- 33 KMP 13, 395v—436v.
- 34 KMP 13, 413v.
- 35 KMP 13, 221—334.
- 36 KMP 13, 1—134.
- 37 AN IV, 59.
- 38 KMP 13, 24v.
- 39 KMP 13, 44 u. ff.
- 40 KMP 13, 130 u. ff.
- 41 O. Gingerich: A Study of Kepler's Rudolphine Tables. Acts of the XI. International Congress of History of Science. 1965.
- 42 B. Tuckerman: Planetary, Lunar, and Solar Positions A. D. 2 to A. D. 1649. Philadelphia 1964.

Bemerkungen zu den Figuren:

- Fig. 1, 3, 5, 8, 10 vom Verfasser
 Fig. 2, 6 nach Figuren von M. Caspar (Neue Astronomie)
 Fig. 4 nach einer Zeichnung Keplers
 Fig. 7 nach einer Zeichnung von K. Stumpff (Himmelsmechanik)
 Fig. 9, 12 nach Angaben Keplers
 Fig. 11, 13 nach Skizzen Keplers