Über die Entwicklung der algebraischen Symbolik vor Kepler im deutschen Sprachgebiet

Wolfgang Kaunzner

Die moderne algebraische Schreibweise ist in etlichen Punkten das Verdienst der deutschen Mathematiker, die im 15. und 16. Jahrhundert im süddeutschen Raum lebten. Diese entwickelten aus den in Wörtern steckenden Ansätzen heraus algebraische Symbole bis zu einer Form, die teils heute noch in Übung ist. Namen von Mathematikern der damaligen Zeit wie *Johannes Regiomontan*, *Johannes Widmann*, *Heinrich Schreyber*, *Christoff Rudolff* und *Michael Stifel* sind eng mit ihrem Wirken auf diesem Gebiet verbunden.

Einleitung

Nur spärlich fließen die Quellen, durch die wir davon Kunde erlangen, wie unsere Vorfahren versuchten, in die einfachsten Rechengesetze einzudringen und wie die Verbreitung dieses Wissens vor sich ging. Die Bewohner unseres Lebensraumes entwickelten sich nach der Bekehrung zum Christentum zu eifrigen Verfechtern der neuen Lehre. Von den Römern konnte aber außer praktischen Methoden an Mathematik nicht viel übernommen werden. So wundert es uns nicht, daß nach wahrscheinlich schon langwährendem Umgang mit dem Rechenbrett und Übung im Fingerrechnen ab dem 13. Jahrhundert schließlich eine — von uns aus gesehen — auf praktische Bedürfnisse zugeschnittene Rechenweise vorerst schriftlich abstrakt fixiert wurde. Zuerst meist nur in theoretisch verfaßten Algorithmen [1] aufgezeichnet, bildeten diese Vorschriften bei uns den Grundstock für die mathematische Korrespondenz der folgenden Zeit, wenn auch die römischen Ziffern noch einer flotten schriftlichen Rechenmethode entgegengestanden haben mögen. Stadt- und Lateinschulen, später die Universitäten, hätten dieser bald durch Kommentare halbwegs sich verbreitenden Neuerung einen guten Nährboden abgeben können. Dort lernte man aber, wenn überhaupt, nur bescheidenes mündliches und zuweilen etwas schriftliches Rechnen. So blieb die Weitergabe neuen mathematischen Wissens zum großen Teil auf die Klöster beschränkt. Im Handel bediente man sich nicht dieser Rechenweise, — man denke etwa an das Runtingerbuch aus dem 14. Jahrhundert, — und so war ihr nur ein bescheidener Platz vorbehalten, obwohl man die Ergebnisse der praktizierten einfachen Beispiele in Verbindung mit dem Rechenbrett fast durchwegs leicht hätte kontrollieren können. Das Rechenbrett hielt sich im Volk noch während der folgenden Jahrhunderte.

Wolfgang Kaunzner, Dozent am Kepler-Polytechnikum Regensburg, 84 Regensburg, Prüfeninger Straße 54b.

Zu erwähnen ist, daß eine bei uns um 1450 in zuständigen Kreisen eingebürgerte Arithmetik, die auf den Algorithmen aufbaut und noch jeder abkürzenden Terminologie entbehrt, in einigen heute in München liegenden vormals teils Regensburger Handschriften enthalten ist [2] und auch als „Algorismus Ratisbonensis" eingeführt wird. Er beginnt: „Quoniam arismetrica in quadruuio tenet principatum nec non eius practica ...". Man gab hierbei gemäß der langen Tradition Standardregeln an, wie in den einfachen Rechenoperationen vorzugehen sei. In der nicht foliierten Augsburger Handschrift 8° Cod 119 aus dem Kloster St. Ulrich und Afra, — jetzt in der Staats- und Stadtbibliothek Augsburg, — begegnet uns aus der Zeit um 1500 [3] ein mit den Worten „Quoniam arithmetrica in mathematica tenet principatum, quare de eius speciebus tam in integris quam fractis est pertractandum" anhebender Traktat; er enthält sinngemäß die gleichen Rechenvorschriften.

Eine von der geschilderten völlig abweichende, weil vorerst absichtlich nicht praxisbezogene Art zu rechnen zeichnete sich bei uns ab, als kurz nach der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts der Blick auch auf vorwiegend theoretische mathematische Probleme gelenkt wurde. Angeregt durch handschriftliche Überlieferung und vielleicht von der durch den Handel mit Italien forcierten Beschäftigung mit algebraischen Fragen, — in Italien erhielt der angehende Kaufmann zuweilen einfache algebraische Unterweisungen, — konnte der Fachmann die im Algorithmenrechnen erworbenen praktischen Kenntnisse in den einfachen Rechenoperationen nun in der Gleichungslehre anwenden. Hier brach aber eine Kluft auf, die sich bisher nicht so deutlich gezeigt hatte: die römischen Ziffern, das Fehlen einheitlicher Rechensymbole, ja aller Rechensymbole, die bislang umständliche Schreibweise für die algebraische Unbekannte [4] und für ihre höheren Potenzen und nicht zuletzt die handschriftlich fast nur fremdsprachig mögliche Weitergabe des Wissens schienen sehr grobe Hindernisse für die Verbreitung zu bedeuten. Es mutet unglaubhaft an, denn deren Bewältigung war ein Vorgang, der sich unter dem Namen „Deutsche Coß" [5] binnen weniger als 100 Jahren vornehmlich im süddeutschen Raum, im späteren Lebensraum *Keplers* vollzog; bis zu solcher Vollkommenheit, daß die nach zwei Richtungen hin zu betrachtende Symbolisierung, — nämlich was und wie abgekürzt wird, — zum Teil schon die noch heute gültige Form erreichte.

Die nachfolgenden Mathematiker in der um 1600 einsetzenden dritten Entwicklungsphase wandten fast durchwegs diese neuen Hilfsmittel als selbstverständlich an. Nun wurde der Blick allerdings, ausgehend von den aus der Astronomie, der Geometrie und später auch aus Physik und Technik stammenden neuen Problemen — „Als erster hat Kepler Naturgesetze in mathematischer Formulierung aufgestellt" [6] — wieder mehr auf praktische Aufgabengebiete hin gelenkt; vor allem im Ersinnen von wendigen und neuen Rechenmethoden läßt sich dies verfolgen. Trotzdem, Logarithmenrechnen, neuzeitliche Ansätze zur Infinitesimalrechnung, das Aufstellen von physikalischen Gesetzen und die schriftlich fixierbaren astronomischen Erkenntnisse wären noch nicht ohne weiteres möglich gewesen, wenn nicht gerade diese Generation von Vorläufern die heute kaum mehr beachtete oder gar gewürdigte, aber doch so nötige Vorarbeit auf diesen Gebieten verrichtet und die Weichen für das Schaffen der Nachfolgenden gestellt hätte.

Möge im Keplerjahr auch den Männern ein kleines Denkmal gesetzt werden, die die Symbolisierung des äußeren Rechenganges eingeleitet und nahezu vollzogen haben; hierdurch brachten sie in die Form der algebraischen Gleichung die Eleganz, die wir als selbstverständlich gewöhnt sind.

Über die Art, wie *Kepler* rechnete, ist in der einschlägigen Literatur schon mehrfach abgehandelt worden; es wirkt zuerst befremdend, daß er sich nicht der ihm zur Verfügung stehenden, damals modernen algebraischen Hilfsmittel bediente: vor allem der aus der Deutschen Coß stammenden symbolischen Schreibweise und der von *François Viète* (1540—1603) eingeführten Rechnung mit Buchstaben anstelle von Zahlen. Wir wissen, daß er mit den neuen Verfahren völlig vertraut war, aber die seiner Ansicht und persönlichen Einstellung zur Geometrie nach geeignetsten für sich und wahrscheinlich auch für seine Mitarbeiter auswählte. An späterer Stelle soll nochmals darauf eingegangen werden.

Die vorliegende Untersuchung stützt sich nur auf eingesehene Handschriften und Drucke aus der Zeit vor *Kepler*. Den beteiligten Bibliotheken in Augsburg, Dresden, Leipzig, München, Regensburg und Wien danke ich für die bereitwillige Unterstützung; Herrn Professor Dr. Ekkehard Preuß, dem Redakteur dieses Bandes, für die fachliche und persönliche Beratung.

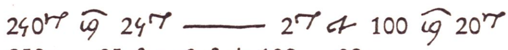
Über die Entwicklung der algebraischen Symbolik vor Kepler im deutschen Sprachgebiet

Die uns von den Arabern überlieferten algebraischen Rechenvorschriften zum Lösen von Gleichungen bis zum Grad zwei fußen auf der um das Jahr 820 von *Mohammed Ibn Musa Alchwarizmi* (780?—850?) schriftlich aufgezeichneten Abhandlung „Algabr w'almuqabalah". Dort sind die Lösungsvorschriften in rein rhetorischer Form niedergelegt und zur Verdeutlichung gibt man ihnen oft den geometrischen Beweis bei. Man vertraute vielleicht noch nicht so recht der neuen Rechenweise und holte sich die Stütze in der bisher gewohnten, aus der griechischen Tradition geläufigen geometrischen Verifizierbarkeit. Wahrscheinlich drang diese Kenntnis auf mehreren Wegen allmählich bis zu uns; vor allem zählen die im 12. Jahrhundert in Spanien blühenden Übersetzerschulen, die Handelsstraße über Süditalien und vielleicht der Manuskriptenschatz, der mit den Gelehrten aus Byzanz bei ihrer Vertreibung 1453 ins Abendland gelangte. Ein ins 13. Jahrhundert zu datierender Traktat des *Jordanus Nemorarius* (um 1260?) über algebraische Fragen, nämlich „De numeris datis", konnte sich infolge unübersichtlicher Darstellung und durch das Fehlen jeglicher Symbolik nur in engem Rahmen behaupten; so, daß kaum von Algebra im späteren Sinn gesprochen werden kann; zumindest nicht von symbolischer [7].

Wie in der Mathematik des Mittelalters bereits üblich, nahm auch in der Algebra Regensburg durch sein Kloster St. Emmeram eine über den Durchschnitt hinausragende Position ein. Vom Jahre 1461 — so weit bisher belegbar — datieren die ersten Ansätze in deutscher Sprache und aus der gleichen Zeit bereits einfache symbolische Schreibversuche; einzusehen im derzeit Münchener Kodex Clm 14 908, der damals im Besitz von St. Emmeram war. Frater *Fridericus Gerhart* (gest. 1464/65) übermittelte seine algebraischen Kenntnisse, indem er für die Unbekannte die Zeichen ℞ oder co, gelesen res bzw. radix oder cosa, für ihr Quadrat ʒ oder ꝛ einführte, gelesen census. Von anderer Hand stammt in der nämlichen Handschrift ϑ für unser x, gelesen Ding. Gleichzeitig fällt ab dieser Zeit bereits der Versuch auf, den Symbolen für die Unbekannte einen exponierten Platz zuzuweisen; man schrieb sie, — auch in der Folgezeit kann man dies noch sehen, — manchmal hochgestellt neben ihren Koeffizienten an. Maßbezeichnungen, etwa Zentner, finden sich mit der Abkürzung Cꝛ bisweilen ebenfalls auf die angesprochene Art wiedergegeben. So begegnen uns in diesen algebraischen Traktaten aus Clm 14 908 u. a. folgende Gleichungen von *Fridericus*' Hand:

Item 1ʒ 2Λ numero ist gleich 12 cosa	für	$x^2 + 27 = 12x$
Item 2ʒ 3cos ist gleich 1ꝛ numero		$2x^2 + 3x = 14$
Λ ℞ mīg 30 equatur de ч ℞ 30		$7x - 30 = 5x + 30$

So wenig wir über Einzelheiten aus dem Leben des genannten Regensburger Mönchs informiert sind, über *Johannes Müller* (1436—1476) aus Königsberg in Franken, genannt *Regiomontan*, wissen wir ziemlich gut Bescheid. Als Astronom und Mathematiker erhielt er einen Platz in der Walhalla eingeräumt. Die einzigen bekannten algebraischen Aufzeichnungen verraten uns, wie weit *Regiomontan* bereits symbolisch arbeitete; bis auf abkürzende Merkmale für plus und minus können wir einen bereits modern anmutenden Gleichungsansatz verfolgen. So finden wir u. a.:



$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$ für

Auch bei ihm fällt die Hochstellung auf, wie sie uns in anderem Sinn in der späteren Potenzschreibweise begegnet. *Regiomontans* „Briefwechsel" [8], dem die Angaben entstammen, liegt in der Nürnberger Stadtbibliothek unter der Signatur Cent 5 app 56c. Er verwendete im Jahre 1463 bereits unsere indisch-arabischen Ziffern in der Form 4, ϥ und 7. Dies in einer Zeit, in der nur wenige Menschen zur Schule gehen konnten und sich das alltägliche Rechnen wahrscheinlich kaum über den Zahlenraum bis zehn hinaus erstreckte. Die Notierung erfolgte, wenn überhaupt, meist in römischen Ziffern. In den Regensburger Manuskripten liest man ꝛ, ч und Λ. Bei den in Nürnberg von *Regiomontan* noch vorhandenen Unterlagen handelt es sich zudem nur um sein Konzept; das Original ging ja an seinen Adressaten *Giovanni Bianchini* (gest. 1466). Wie weit dieser mit algebraischen Leistungen aufzuwarten hatte, wissen wir nicht genau.

Nach einer Pause von ca. 20 Jahren stellt sich die Universität Leipzig ab etwa 1481 als die Stelle vor, an der man Algebra betrieb. Man findet eine deutsche Aufzeichnung aus diesem Jahr im jetzt Dresdener Manuskript C 80, wo auch höhere Potenzen der Unbekannten erscheinen:

ꝛ, ꝛ, ϑ, $\frac{1}{ϑ}$, dingk für x; ʒ, cʒ, $\frac{1}{cʒ}$, czensi für x^2;

chu, chub, chubi, $\frac{1}{ch}$, $\frac{1}{chu}$ für x^3; ꝛ von ꝛ für x^4.

Die ersten algebraischen Universitätsvorlesungen fanden 1486 in Leipzig statt. Die Zeichen für die Potenzen der Unbekannten zeigen hier bereits eine einheitliche Form, nämlich:

𝔯, 𝔷, 𝔠, 𝔷𝔷 für x, x^2, x^3, x^4

Hinzu tritt das Symbol ϕ für die Konstante. Wahrscheinlich nahm man dieses in den Gleichungsansatz hinein, um in dessen Form ein einheitliches Aussehen zu bringen. Das Kürzel selbst dürfte sich aus der synkopierten Schreibweise ∂e für denarius (= Pfennig) entwickelt haben. Man behandelte zum Teil solche Aufgaben, nachdem man die Lösungsregeln erklärt hatte, in denen Geldbeträge zu ermitteln waren; so bot sich hier eine Währungseinheit sinngemäß als die Konstante an. Man findet etwa:

3 𝔯 — 2 ϕ ad 1 𝔯 ŧ 1 ϕ facit ȣ 𝔯 — 1 ϕ
8 ϕ — 1 𝔯 de 1 𝔯 ŧ 1 ϕ restant 2 𝔯 — Λ ϕ
4 𝔯 — 2 ϕ per 3 ϕ ŧ ȣ 𝔯 facit Λ 𝔯 ŧ 20 𝔷 — 6 ϕ

Außer dem Bruchstrich hatte man bislang keine abkürzenden Operationssymbole geschaffen. In einem der algebraischen Traktate im C 80, und zwar im „Algorithmus de additis et diminutis" läßt sich nun feststellen, wie das Minuszeichen bewußt als Operations-, nicht als Vorzeichen eingeführt wird. Während des Entstehens der dortigen Aufzeichnungen muß der Schreiber der Abhandlung die Anweisung erhalten haben, anstelle des bis dahin geschriebenen „m" ab jetzt den Strich zu setzen. Gelegentlich taucht die Annahme auf, bei den damals üblichen schweren Frachtballen habe man öfters Untergewicht gegenüber der geforderten Norm vorgefunden und man notierte etwa „2 c (= Zentner) minus 12 lb". Anstelle des umständlichen „minus" sei bei schnellem Schreiben nun der Strich entstanden. Falls wirklich einmal ein Ballen zu viel wog, dann wurde dieses Minuszeichen durchgestrichen. Ergänzt wird diese Überlegung durch die korrespondierenden Ligaturen für „et", nämlich ŧ und ꝸ. Um die Multiplikation anzugeben, bediente man sich meist der Worte „in, mit, von, wider". Im Augsburger Manuskript 8° Cod 1 von ca. 1500[9] ist sehr schön zu sehen, wie sich aus der Abkürzung für „in" der Malpunkt entwickelt haben könnte. Man brauchte den Bogen nur mehr wegzulassen: „Si infra decem aliter alterum multiplicat, Vt 6 ⁀· 6, tunc additur cui placet nulla, scilicet 0 ..." liest man auf Blatt 4vf[10]. Das heutige Gleichheitszeichen erschien trotz *Regiomontans* Vorschlag relativ spät, erst 1557 bei *Robert Recorde* (1510?—1558). Bis dahin und auch später hieß es „aequatur, das macht".

Die erwähnte Vorlesung an der Leipziger Universität wurde in mehrere Kapitel gegliedert. Als neue Disziplin, mit der man sich gleich intensiv befaßte, tritt die Beschäftigung mit Wurzelrechnungen auf. Neu ist nun, daß man auch damit beginnt, die Unbekannte in irrationalen Ausdrücken, also unter der Wurzel erscheinen zu lassen. So, wie man bisher in diesen Jahren der Beschäftigung mit Algebra das Rechnen mit den Potenzen der Unbekannten als eigene Disziplin abgespalten hatte, führte man das Rechnen mit Irrationalitäten nach fast drei Jahrhunderte währender Pause[11] als gesonderten Abschnitt ein. In speziellen Algorithmen „De surdis" erteilte man Anweisungen, wie bei Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Wurzelausdrücken vorzugehen sei. Es ist verständlich, daß man in dieser Zeit der Verkürzung des äußeren Rechenganges auch hier versuchte, passende Zeichen zu ersinnen: ein vorgesetzter Punkt sollte die Quadratwurzel, zwei nebeneinander gesetzte die 4., drei die 3., vier die 9. Wurzel bedeuten. Zudem bestand weiterhin die bisher geübte Möglichkeit, ein „radix quadrata de, radix de radice de, radix cubica de, radix cubica de radice cubica de" anzuwenden. In den noch vorhandenen ehedem Leipziger Texten läßt sich dieses Nebeneinanderbestehen deutlich verfolgen. Die Schreibweise freilich dürfte manchmal zu Mißverständnissen beigetragen haben, weil etwa „... 125 + ... 64" für $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{64}$ doch einige Unklarheiten hervorrufen konnte. Man interpunktierte nämlich zuweilen bereits, wenn auch ziemlich willkürlich. Daß man drei Punkte wirklich verwendet, fand ich bisher nur im Wiener Kodex 5277 aus der Zeit um 1500—1520; auch der frühe Gebrauch von + und — als Vorzeichen ist dort nachzuweisen. In der jetzt Münchener Handschrift Clm 26639, die bis zum Jahre 1876 unter der Signatur Ratisb. Civit. Nr. 64 in Regensburg war — man kennt den Herkunftsort jedoch noch nicht genau — liest man bisweilen auch „ ta", also „radix quadrata". Allgemein macht sich hier anscheinend in ehedem Regensburger Handschriften die Trennung zwischen „res (=)" für die Unbekannte und „radix (=)" für die Quadratwurzel deutlicher bemerkbar als in vergleichbaren Leipziger Texten, wo vorerst offenbar der Punkt die Wurzel bezeichnete, unser x. Später schien dort diese Unterscheidung zu verflachen und man findet oder als Zeichen für beide; die Lesart allerdings dürfte meist verschieden geblieben sein, nämlich „radix" für die Wurzel, „res" oder „cosa" für die Unbekannte. Für die Quadratwurzel aus der Unbekannten schrieb man „ de " oder „ de " und las es wahrscheinlich „punctus de re" oder „punctus de radice"; etwa in der Aufgabe: „1 valet .8 "; „per delecionem puncti", also „durch die Zerstörung des Punktes" gelangt man zur Lösung dieser Gleichung $x^2 = \sqrt{8x}$. Im genannten Wiener Manuskript treffen wir u. a. auch das Beispiel: „Wann von 16 wirt gleych sein 2 so quadrir sy alle beyde" und die Rechenvorschrift: „mit abwischung des puncts"; obwohl als Wurzelzeichen geschrieben, las man „punctus". In diesem Kodex kann man an anderer Stelle erkennen, daß bei flottem Schreiben aus den Punkten kleine Haken wurden, so daß etwa für $\sqrt{9}$ zu finden ist: ˬ9 oder ˄9.

Als erstes gedrucktes deutsches Rechenbuch mit Symbolen kennen wir das von *Johannes Widmann* aus Eger (geb. um 1460) im Jahre 1489 in Leipzig erschienene; in seinem kaufmännischen Teil enthält es als Operationssymbole die Zeichen + und —. 1518/21 gab *Heinrich Schreyber* aus Erfurt (vor 1496—1525) sein Algebrabuch in Nürnberg heraus, geschrieben wurde es in Wien; + und — finden bereits durchgehend Verwendung, aber als Zeichen für die Konstante und für die Potenzen der Unbekannten lesen wir: N, pri, se, ter, quart, ... *Schreyber* führt die Überlegung an, daß bei Vergleichen der einander entsprechenden Glieder einer arithmetischen und einer geometrischen Folge, nämlich

N	pri	se	ter	quart	quint	sext	...
0	1	2	3	4	5	6	...

bei Multiplikation bzw. Division oben, in der unteren Zeile Addition bzw. Subtraktion entspricht. Eine Erweiterung des Gedankens, wie er im C 80 wie folgt aufgetreten war: bei Multiplikation zweier Glieder aus der Folge ϕ, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{zz}$, ... merke man beide durch über sie gesetzte Punkte an. So weit das eine markierte Zeichen dann von ϕ entfernt ist, ebenso groß ist der Abstand des Resultates vom Zeichen mit dem anderen Punkt. Wir spüren in diesem Gedankengang, der von *Schreyber* in die Division von Potenzen der Unbekannten hinein fortgesetzt wurde, deutlich den Anklang an die Vorstellungen, wie sie wenige Jahrzehnte später von *Michael Stifel* (1487?—1567) bedeutend erweitert wurden; er stellte in seiner „Arithmetica integra“ [12] u. a. gegenüber

-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

und erkannte sicherlich die Prinzipien, welche die Logarithmenrechnung begründen; mit geschlossenen Augen müsse er gleichsam an diesen wunderbaren Eigenschaften der Zahlen in seinem umfangreichen Werk vorübergehen. In *Schreybers* Absicht war es offenbar gelegen, durch die besondere Namengebung für seine Potenzen mit auf diejenigen Möglichkeiten hinzuweisen, welche sich nicht nur durch Multiplikation und Division von Gliedern seiner oberen Folge ergeben, sondern — soferne möglich — auch bei Quadrat- bzw. Kubikwurzelziehen; diesem kommt in der unteren Zeile Division durch 2 bzw. 3 zu. Solcher Art sind auch seine Erläuterungen.

Christoff Rudolff (1500?—1545?), ein Schüler *Schreybers*, wandte wieder die geläufigen Potenzsymbole an, also ϕ, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{zz}$, ... für x^0, x, x^2, x^3, x^4, ... Charakteristisch ist die Schreibweise für die Wurzeln in seiner 1525 erschienenen „Coss“. $\surd$, $\surd\!\surd$ bzw. $\surd\!\surd\!\surd$ sind die Symbole, die er vor einen Ausdruck setzt, um dessen 2., 4. bzw. 3. Wurzel zu ziehen. Der Zusammenhang mit den über Leipzig und Wien als Wurzelzeichen bereits geläufigen vorgesetzten Punkten ist evident: „$\surd\!\surd\!\surd 6$ von $\surd\!\surd\!\surd 162$ Restat $\surd\!\surd\!\surd 48$“ steht für $\sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48}$.

Rudolffs bald vergriffenes Buch diente *Stifel* mit als Vorlage. Jetzt finden wir *Rudolffs* Vorschläge, sinnvoll verbunden mit den cossischen Symbolen für die Potenzen der Unbekannten verschmolzen zu $\surd\mathfrak{z}$, $\surd\mathfrak{c}$, $\surd\mathfrak{zz}$, ... als Zeichen für die 2., 3., 4. ... Wurzel: „$\surd\mathfrak{z}.\surd\mathfrak{z}$ 6 + 2.“ etwa bedeutet, $\sqrt{\sqrt{6}+2}$. *Stifel* scheute als erster nicht davor zurück, in seiner Bearbeitung von *Rudolffs* „*Coss*“ [13] Polynome als Radikanden anzusetzen.

Die cossischen Zeichen nahmen immer beständigere Formen an, das heißt zugleich, sie gestalteten den Rechengang in der algebraischen Gleichung fortwährend geläufiger und übersichtlicher. Algebraische Terme konnten nun in die Form gebracht werden, die es gestattete, neue Probleme in der Mathematik zu berühren; denn auch wir stellen fest, daß die Gleichung „$1\mathfrak{r} + \surd\mathfrak{z}.1\mathfrak{z} - 1\mathfrak{r}$. aequatur 2“ für „$x + \sqrt{x^2 - x} = 2$“, wie *Stifel* [14] sie wahrscheinlich aufgezeichnet hätte, ohne weiteres lesbar ist. Im Clm 14 908, im Jahre 1461 notierte man sie: „Gib mir ain censum vnd zuech dar von sin wurcz, vnd von dem, daz vber belyb an dem censu, zuech och vsz dye wurcz; dye czwo wurcz tue zesamen, daz 2 zal dar ausz werden“ [15]. Zudem gab *Stifel* eine umfassende Regel für die Lösung von Gleichungen 2. Grades an, nach welcher nicht mehr eine Aufgliederung in verschiedene Lösungswege in Abhängigkeit von den Vorzeichen der Koeffizienten vorgenommen werden mußte. Man ließ ja bisher fast durchwegs nur solche Gleichungsansätze gelten, in denen positive Koeffizienten auftreten; so wurden $cx^2 = bx + a$; $cx^2 + a = bx$; $cx^2 + bx = a$ nach drei verschiedenen Lösungsvorschriften behandelt. Ja, man betrachtete zeitweilig in noch engerem Rahmen jeden Gleichungsansatz für sich und gelangte zu 24 verschiedenen Typen; hierin sind auch die reduzierbaren Gleichungen höheren Grades enthalten.

Das Zeichen für die Unbekannte, das sich schließlich zum x entwickelte, ist auch mit als Resultat dieses nicht ganz 100 Jahre währenden Prozesses in der algebraischen Schreibweise zu verstehen: im Clm 14 908; , , bei *Regiomontan;* von *Widmann* im C 80; verwendeten andere Schreiber im C 80 und in anderen Leipziger Manuskripten; in späteren Handschriften oder in Drucken findet man ziemlich einheitlich oder . Das deutsche x, nämlich , schrieb man nicht anders. So könnte sich beim Studieren solcher Texte das gesprochene x anstelle des zu lesenden „res, radix, cosa" durchgesetzt haben.

Es wurden auch Versuche unternommen, in dieser Epoche der Deutschen Coß die neuen Erkenntnisse unabhängig vom Lateinischen einem größeren Interessentenkreis zu vermitteln. Gerade *Stifel* ist hier hervorzuheben; er führte in seiner „Deutschen Arithmetica" [16] für die Unbekannte und ihre Potenzen die Namen „sum, sumsum, sumsumsum, ..." ein, für die Wurzeldarstellung wählte er der Reihe nach: , , , ... Dieser Vorschlag fand keinen Widerhall.

Der aus Coburg stammende Rechenmeister *Simon Jacob* (1510?—1565) diente mit seinem Werk „Ein new vnd Wolgegruendt Rechenbuch" [17] — abhängig von *Stifel*, — dem Schweizer *Jost Bürgi* (1552—1632), einem der Begründer des Logarithmenrechnens. *Stifels* seinerzeit nur angedeutete Ideen wurden also kurze Zeit nach seinem Tode bereits richtig gewertet. Auch andere mathematische Methoden, etwa die Prosthaphairesis, fanden erneut lebhaftes Interesse [18]. Hier wird versucht, die Multiplikation geeigneter Terme auf Addition bzw. Subtraktion anderer Ausdrücke zurückzuführen, und zwar mittels der Formeln:

$$2.\cos u.\cos v = \cos(u - v) + \cos(u + v)$$

$$2.\sin u.\sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v)$$ [19]

Es ist verständlich, daß solche formalen Ergebnisse, ebenso wie die trigonometrischen Funktionswerte am einfachsten in tabellarischer Übersicht wiederzugeben waren. So beginnt nach *Stifel*, nach dem Ende der Periode unserer Betrachtung wieder ein Zeitabschnitt, in dem als Neuschöpfung auch große Tabellenwerke entstehen; ebenso wie an ihrem Anfang, als *Regiomontan* etwa seine Übersichtstafeln für die astronomischen Berechnungen zusammengestellt hatte. Die Notierung in den indisch-arabischen Ziffern hätte sich spätestens jetzt vollends behauptet, sie hatte sich aber bereits im 16. Jahrhundert durchgesetzt; der Weg über die als Apices bezeichneten Formen, etwa

war sehr langwierig gewesen [20].

Warum wandte *Kepler*, dem das mathematische Wissen seiner Zeit so offen gelegen hatte, die Ergebnisse der systematischen Schreibweise der Coß nicht an? „Die Fragen nach der ‚Existenz der mathematischen Dinge' sind für Kepler immer wieder hervorragend wichtig" [21]. Bei der Untersuchung der Größe der regelmäßigen Siebenecks-Seite [22] gelangte er zur Überzeugung, daß diese außerhalb des Kreises nicht geometrisch beschrieben, folglich nicht konstruiert werden kann. Wir erkennen auch hier, daß sein Vorgehen unmittelbar an der Geometrie der Griechen orientiert ist, — „Wo steht Kepler? Unmittelbar neben Euklid!“ [23], — und er nimmt Stellung zu der Art, wie *Bürgi* die entsprechende Seite algebraisch berechnet hatte. Auch die Mehrdeutigkeit in der Lösung der hier auftretenden Gleichung $7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0$ widerspricht *Keplers* Empfinden für geometrische Eindeutigkeit. Lassen wir ihn selbst sprechen, ihn, der nicht einmal mit + und — als Operationssymbolen arbeiten wollte: „... und [24] der arme Rechner, von allen Hilfsmitteln verlassen, hängt in dem Zahlengestrüpp und schaut umsonst nach seiner Coss aus. Das ist der eine Unterschied zwischen dem cossischen und dem geometrischen Verfahren ... Bei der algebraischen Analysis ist es nun höchst merkwürdig (der Geometer fühlt sich freilich hierdurch in erster Linie abgestoßen), daß das, was verlangt wird, nicht auf einem einzigen Weg erreicht werden kann. ... Vorausgesetzt auch, daß ein einziges Verhältnis das Verlangte leistet, so erfährt man doch nicht, wie man dieses genau erhält, sondern nur, wie man ihm von ferne näher kommt. Denn während die Strecken ihrer Art nach hinsichtlich der Wißbarkeit zu den unaussprechbaren gehören (d. h. zu den nicht zählbaren, die die Zahlen verschmähen) und daher die Rechnung durch keine noch soweit gehende Fortsetzung zu Ende geführt wird, ohne daß nicht immer etwas im ungewissen bleibt, kennt doch diese Rechnung, wie oben an zweiter Stelle gesagt wurde, außer den Zahlen keine anderen Hilfsmittel. Man teilt vielmehr den Durchmesser auf verschiedene Weise in tausend und aber tausend Teile, um die Rechnung immer genauer zu machen. Allein dabei wird das Ergebnis doch niemals völlig genau. Kurz, das heißt nicht die Sache selber wissen, sondern etwas, das ihr sehr nahe kommt, aber doch größer oder kleiner ist. Immer kann ein späterer Rechner die Annäherung noch weiter treiben; an das Ziel selber zu gelangen ist aber keinem möglich. Von dieser Art ist freilich alles, was rein nur in der Potenz der quantitativen Materie liegt und keine wißbare Formation besitzt, durch die es einmal in den Akt menschlicher Wißbarkeit gerückt wird.“

„Sit BA .\'. Aufer \ CA ab \', restat \' — \ CA. Quod duc in \', Dividendus \'' — \' CA“ [25] lautet eine kleine Stelle aus einem noch nicht veröffentlichten Text zu *Keplers* Vorarbeiten für die Bestimmung der Merkurbahn, datiert mit 17. 12. 1614; die Originale befinden sich in Leningrad. Wahrscheinlich wich er hier, — auch entgegen seiner sonstigen Gepflogenheit, — wegen der beim Planeten Merkur großen Exzentrizität auf algebraische Methoden aus und benützte die cossischen Symbole in der ihm eigentümlichen Schreibweise. In seinem Weinvisierbuch von 1616 begegnet uns ebenfalls ein Hinweis: „Ob nun wol beyder Orten es ein schöne Uebung gibt für scharpfsinnige Ingenia, daß sie eines jeden Bogens Senne von Grund auss durch geometrische Scherpffe, oder durch die Cossa, jede nach jhrer Art, rechnen mögen“ [26].

Wieviel leichter wäre es vielleicht ihm, sicherlich aber seinen Lesern gefallen, hätte es ihm nicht widersprochen, seine bisweilen kompliziert formulierten Erkenntnisse in symbolischer algebraischer Ausdrucksweise wiederzugeben. Eigentlich müßte man ja sogar erwarten, daß er die gerade in seinem späteren Lebensraum zwischen 1460 und 1550 hervorgetretenen Leistungen nicht ignorieren, sondern an sie anknüpfen würde. Nach der ruhigeren Epoche in der mathematischen Entwicklung in Deutschland zwischen 1550 und 1600 wäre dies eigentlich nur ein formgerechtes Fortsetzen der aufgezeigten Tradition gewesen. Er äußert sich aber selbst: „Wir ziehen also den Schluß: Jene cossischen Analysen haben mit unserer gegenwärtigen Betrachtung nichts zu tun; sie begründen nicht irgendeinen Grad der Wißbarkeit, der vergleichbar wäre mit denen, die wir im früheren entwickelt haben“ [27].

Daß *Kepler* anders vorging als seine Zeitgenossen, stimmt ohne erkennbaren Zusammenhang aber wiederum mit der im frühen 17. Jahrhundert zeitweilig anzutreffenden Bewertung der Coß überein. Es kam noch nicht viel neues hinzu und man begann das bisherige gar zu verniedlichen. „Arithmetischer cubiccossischer Lustgarten“ als Titel eines Algebrabuches von *Johann Faulhaber* (1580—1635), erschienen 1604, wäre charakteristisch hierfür. So wurde *Heinrich Schreyber* z. B. als algebraischer Schriftsteller erst 1867 wiederentdeckt [28].

Summary

The age of Renaissance had effects on the development of mathematics in Germany mainly in the respect that it was tried to shorten the formal procedure in arithmetics and algebra. Eventually a process lasting for so long was brought to a close by turning away from the rhetorical way of writing that had been practised up to now and adopting the symbolical style. Quite different ways had been tried until about in 1550 *Michael Stifel* offered such symbols in his mathematical works that did not only show an algebraic equation for instance in a clear form, but also a major part of the algebraic termini technici, which were familiar at that time and in use.

By then the Indian-Arabic ciphers had finally replaced the Roman ones and fast calculating was possible. How else could one have achieved the voluminous mathematical tables without this help at the turn of the 16th to the 17th century?

Usually it is the more astonishing that *Johannes Kepler* only made use of the new ciphers and — though completely acquainted with the algebraic methods as he points out in some passages — by geometrical reflections he came to his conclusions that were so important for mathematics.

In this essay it is tried to give a short summary of the development of algebra in Germany between 1460 and 1550.

Weitere Arbeiten zu diesem Thema wurden vom Forschungsinstitut des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik in München veröffentlicht.

Anmerkungen

1 Z. B. ein „Algorismus vulgaris“, in welchem die Rechenoperationen in ganzen Zahlen bis zu Reihenlehre und Kubikwurzelziehen gelehrt werden; in einem „Algorismus de minutiis“ wurden einfache Gesetze für das Bruchrechnen aufgezeichnet.

2 So etwa in den Handschriften: Clm 5964, Clm 14 504, Clm 14 544, Clm 14 783. Die praktische Aufgabensammlung hierzu ist bereits ediert von *Kurt Vogel*, Die Practica des Algorismus Ratisbonensis, Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte, Band 50, München 1954.

3 Der Einband stammt von 1508 gemäß *Ernst Kyriß*, Verzierte gotische Einbände im alten deutschen Sprachgebiet, Stuttgart 1951, S. 75; als Muster diente die Jagd Rolle IV.

4 In vorhandenen handschriftlichen Vorlagen.

5 Abgeleitet aus cosa = Sache, Ding. „Deutsche Coß" wurde zum Fachausdruck für die hier besprochene Algebra.

6 *Max Caspar*, Johannes Kepler, Mysterium Cosmographicum, Das Weltgeheimnis, Augsburg 1923, S. VIII.

7 Ediert von *Maximilian Curtze*, Commentar zu dem ‚Tractatus de Numeris Datis' des Jordanus Nemorarius, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 36, 1891.

8 Abgedruckt von *Maximilian Curtze*, Der Briefwechsel Regiomontan's mit Giovanni Bianchini, Jacob von Speier und Christian Roder, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance, 1902.

9 Vorne findet sich in dieser Handschrift das Datum 1504. Gemäß *Kyriß* [3], S. 74, stammt der verwendete Einband Jagd Rolle III von 1482—1525.

10 Dieser Kodex ist noch nicht foliiert; so erfolgt die Blattangabe ab Beginn der arithmetischen Abhandlungen.

11 *Leonardo von Pisa* (1180?—1250?) hatte sich in seinem „Liber abbaci" 1202 auch mit solchen Aufgaben abgegeben.

12 Erschienen 1544 in Nürnberg.

13 Die Titel lauten: *Christoff Rudolff*, Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genennt werden, Straßburg 1525; *Michael Stifel*, Die Coss Christoffs Rudolffs, Königsberg 1553.

14 *Stifel* grenzt Wurzelausdrücke durch Punkte ab. Man sehe hierzu etwa: *Joseph Ehrenfried Hofmann*, Michael Stifel, Sudhoffs Archiv, Beiheft 9, Wiesbaden 1968, S. 22.

15 Aus den Aufzeichnungen des St. Emmeramer Mönchs *Fridericus Gerhart.*

16 1545 in Nürnberg herausgekommen.

17 Frankfurt 1565.

18 Diese Umformung wurde erstmals 1514 von dem Nürnberger *Johannes Werner* (1468 bis 1528), — er kannte *Regiomontans* Nachlaß, — verwendet. Man sehe etwa *Joseph Ehrenfried Hofmann*, Geschichte der Mathematik, Sammlung Göschen, Band 226/226a, Teil 1², Berlin 1963, S. 121.

19 Sinngemäß entnommen aus *Moritz Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band 2², Leipzig 1900, S. 454 f.

20 Diese und Variationen hiervon findet man im C 80; etwa Bl. 136^v—142^v; wahrscheinlich Formen aus dem 12.—14. Jahrhundert.

21 *Theodor Peters*, Über Näherungskonstruktionen und Mechanismen im ersten Buch der Harmonik Keplers, Deutsche Mathematik, Leipzig 1941, S. 131.

22 Hier danke ich Herrn Professor *Hofmann* für die entsprechenden Hinweise.

23 *Theodor Peters*, Jo. Kepleri Harmonices Mundi Liber I, Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Berlin 1940, S. 88.

24 Die Zitate erfolgen gemäß der deutschen Übersetzung von *Max Caspar*, Johannes Kepler, Weltharmonik, München/Berlin 1939, S. 50 f.

25 „Sei BA gleich 1x. Ziehe 1 CA von 1x ab, bleibt 1x — 1 CA. Multipliziere dieses mit 1x, ergibt sich als Dividend $1x^2$ — 1x. CA". Dem Entgegenkommen von Herrn Dr. *Volker Bialas* verdanke ich diese Notiz, die gleichzeitig einen Einblick in *Keplers* algebraische Schreibweise vermittelt.

26 Entnommen aus: *Alfred Götze*, Anfänge einer mathematischen Fachsprache in Keplers Deutsch, Berlin 1919, S. 39.

27 Zitiert aus *Caspar* [24], S. 51 f.

28 *C. J. Gerhardt*, Zur Geschichte der Algebra in Deutschland, Berliner Monatsberichte 1867.