Von 1 + 1 = 2 bis 1 + 1 = 10
oder
vom Fingerrechnen bis zum Computer

Eine Zahlenstudie von Ludwig Pongratz*

*) Ludwig Pongratz, Oberstudiendirektor a. D., Regensburg, Agnesstraße 11/III

Acta Albertina Ratisbonensia. Bd. 29. S. 87—99. Regensburg 1969

Im Urmenschen wie im Kind
tritt die Geburt des Ich ein
in dem Augenblick,
wo beide das Phänomen
der Zahl erfassen,
mithin eine sie umgebende
Umwelt besitzen.

Oswald Spengler

Eine der ersten mathematischen Betätigungen des Menschen war sicher das Zählen. Zum Festhalten der Anzahl gleichartiger Dinge bediente er sich der menschlichen Gliedmaßen, der Finger, der Zehen, oder man machte für jeden der gewählten Gegenstände einen Strich auf den Erdboden oder eine Kerbe in ein Holz oder gar einen Knoten in eine Schnur.

Diese Tätigkeit setzt voraus, daß man sich von den konkreten Begriffen gelöst und die Zeichen als abstrakte Eigenschaften betrachtete. Um größere Mengen überblicken zu können, wurden nach *bestimmten Abständen*, so ähnlich wie wir es beim Zählen des Münzgeldes machen, einzelne Haufen angelegt oder besondere Striche oder Knoten gemacht. Besonders geeignet für diese Marken war die Zahl der Finger und Zehen.

Alle diese Maßnahmen führten zu einer sprachlichen Entwicklung der Zahlen; es entstanden *Zahlwörter* und je nach der Einteilung *Zahlensysteme*. Es ist klar, daß die Zahl der 5 Finger an *einer* Hand, oder der 10 Finger an beiden Händen oder der 20 Finger und Zehen bevorzugt waren.

Neben der sprachlichen Entwicklung ging eine schriftliche Symbolisierung der Zahlen einher; es entstanden *Zahlzeichen, Ziffern*. Den einzelnen Zahlensystemen wurden bestimmte Ziffern als Stufenzahlen zugrunde gelegt. Bevorzugt waren die Grundzahlen 5, 10, 20, 60, vereinzelt auch 12; dementsprechend unterscheiden wir Quinar-, Dezimal-, Vigesimal-, Sexagerimal- und Duodezimal-Systeme.

In diesen werden die Ziffern entweder additiv nebeneinander oder durch ihre Stellung in der Zahl mit einem bestimmten Stellenwert (Positionswert) versehen.

A Natürliche Systeme

I. Das Additionsprinzip

Die einzelnen Ziffern werden nebeneinander gestellt und bestimmen durch ihre Addition den Wert der Zahl. Dabei zeigt sich allgemein das Prinzip, daß die höheren Werte entgegen der Schriftrichtung neben die niedrigeren Werte gereiht werden.

Dieses Additionsprinzip finden wir bei den alten Griechen, Römern, Ägyptern und Azteken.

Am bekanntesten ist bei uns das Zahlensystem der Römer, das wir als Quinar- oder Fünfersystem bezeichnen können.

a) Das Quinarsystem der alten Römer

Die Zahlzeichen für die Einer bestehen von eins bis vier aus geraden Strichen (senkrecht, auch horizontal), also I, II, III, IIII.

Die Stufenzahl Fünf besteht aus zwei schräg gestellten Strichen: V. Vielfach wird die Ansicht geäußert, dieses Zeichen bedeute eine Hand.

In der römischen *Sprache* gehen die Zahlbezeichnungen über fünf hinaus ohne Andeutung der Stufenzahl V; so heißt fünf quinque, sechs sex, sieben septem usw., während in der Schrift scharf die Grundzahl V herausgestellt wird als VI, VII, VIII und altertümlich neun gleich VIIII.

Nach dem Quinarsystem der Römer ist für Zehn ein neues Zeichen fällig: X.

Die nächsten Zahlen sind XI, XII, XIII bis XX. Erst der fünfte Zehner bekommt ein neues Zeichen: L. Die nächsten Zehner bis hundert werden additiv angehängt: LX, LXX usw. Der fünfte Zehner erhält eine neues Zeichen: Hundert: C. Und so geht es weiter. Der fünfte Hunderter ist D. Für die nächsten Hunderter wird C additiv angehängt bis zum fünften weiteren C, Tausend wird durch M ausgedrückt. Für mehrfache Tausend wurde häufig ein Multiplikationsfaktor links von C oder D vorgesetzt. So wurde unsere Zahl 21 662 ausgedrückt durch $\overline{\text{XXI}}$DCLXII. Keine Ziffer hat einen Stellenwert. C bedeutet hundert, ganz gleich, ob es allein steht oder an irgend anderen Stellen. DCLXXI heißt 671, selbst wenn man die Ziffern durcheinander brächte. Es kann nicht verschwiegen werden, daß die Römer auch die Grundzahl 12 in Gebrauch hatten, aber nur für das Bruchrechnen. Vielleicht kommt dieser Brauch von folgender Überlegung: eine Hand hat ohne Daumen vier Finger, jeder Finger hat drei Glieder; also ein Fingerglied der dritte Teil eines Fingers und damit der zwölfte Teil der Hand. Wie der Münchener Naturforscher Carl v. Martius in einem Bericht über seine Brasilienreise (1817—1820) erzählte, waren für die Indianer Brasiliens die drei Glieder eines Fingers die Grundlage ihres Zählens [L. Pongratz in Acta Albertina Ratisbonensia, Heft 25, Seite 75, Regensburg 1963].

Auch bei den Kamtschadalen gilt fünf insofern als Grundzahl, als sie wie die Tschantschu an der äußersten Spitze Asiens die Zahlen 6—9 durch 5 + 1, 5 + 2 usw. ausdrücken [Rüdiger, Geschichte d. menschl. Spr., S. 83]. In White Journ. of a Voy 1800 wird das gleiche von den Kaffern in Afrika erzählt. Balbi, Park und andere Reisende berichten von der pentadischen Zählweise afrikanischer, asiatischer und polynesischer Urvölker.

b) Die Griechen

Bei den alten Griechen gelangte die Mathematik zu höchster Blüte. Man sollte meinen, daß auch ihre Zahlzeichen eine entsprechende Entwicklung zeigen. Wir unterscheiden ein früheres System, das in den attischen Schriften vom 6. bis 1. Jahrhundert vor Christus verwendet wurde. Geschildert wurde es von dem Grammatiker Herodian um etwa 200 nach Christus, weshalb man die betreffenden Zahlzeichen auch Herodianische Zeichen nannte. Die Einer waren durch senkrechte Striche ausgedrückt, die Fünfer durch ein großes Pi, die Zehner durch ein großes Delta, die Hunderter durch H, die Tausender durch Chi = X und die Zehntausender durch M. Es war also XHHHΔΔI = 1321. Dieses System erinnert stark an die römische Schreibweise. Eine jüngere Schreibart ging von Milet aus, die den kleinen Buchstaben des Alphabets Zahlenwert gab. Alpha war also gleich 1, beta gleich 2, gamma gleich 3, delta gleich 4, iota = 10, kappa = 20, lambda = 30, rho = 100 usw. Zur Unterscheidung von den Wortbuchstaben erhielten die Zahlenbuchstaben einen kleinen horizontalen Strich über dem Buchstaben.

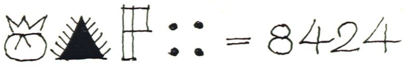
c) Das Vigesimalsystem

Die Zählung über zehn hinaus führte bei vielen Völkern Afrikas, Asiens und Amerikas zur Einführung einer weiteren Stufenzahl *Zwanzig*, die zu der Zahl der zehn Finger noch jene der Zehen heranzog. So erzählt Barbot in seiner Beschreibung von Guinea, daß bei den Mandingos „Zwanzig" als neuer Zahlenwert mwau gebildet worden sei und sich bei $40 = 2 \cdot 20$, $60 = 3 \cdot 20$ eingebürgert habe, während $30 = 20 + 10$, $50 = 2 \cdot 20 + 10$, $70 = 3 \cdot 20 + 10$, $90 = 4 \cdot 20 + 10$ galt. Wen erinnert das nicht an die französische Zählung, bei der 70 gleich soixante-dix, 80 = quatre-vingt und 90 = quatre-vingt-dix ist? Die Vorfahren der Franzosen sind offenbar barfuß gelaufen; die Schuhe werden sie sich beim Zählen nicht eigens ausgezogen haben. Bemerkenswert ist, daß das Blindenhaus in Paris „des quinze-vingts", also das Fünfzehnmalzwanzig-Haus heißt, und ein Blinder mit quinze-vingts bezeichnet wird. König Ludwig der Heilige hat das Haus im Jahre 1260 für 300 Insassen gebaut.

Wie bei den Mandingos fand Buschmann (Iles Marquesas, p. 174) die multiplicativen Zahlen für 40 bis 90 bei den Bewohnern der Tonga- und Marquesas-Inseln und Barbot bei den Tscherkessen und Kamtschadalen. A. v. Humboldt berichtet in seiner Abhandlung über Zahlensysteme (Crelles Journal IV, 209 ff.) über ähnliche Zählweisen bei den Muyscas, Othoniten, Azteken, Cora-Indianern, Quaranis, Abipones, Karaiben und Grönländern. In ihrer Sprache ist 20 die neue Grundzahl; es ist demnach $40 = 2 \cdot 20$, $60 = 3 \cdot 20$, $100 = 5 \cdot 20$, $200 = 10 \cdot 20$. Vielfach wird 20 als 1 Mensch (nämlich alle Finger und Zehen eines Menschen) eingeführt, so bei den Huastecas von Tampico und den Quiche in Guatemala.

Bei den *Mayas* in Yucatan war nach Gallatin (Transact. of Amer. Eth. Soc. I) 1 = hun, 2 = ca, 3 = ax, 4 = can, 5 = ho, 10 = lahun, $20 = 1 \cdot 20$ = hun-kal, $40 = 2 \cdot 20$ = ca-kal, $100 = 5 \cdot 20$ = ho-kal, $200 = 10 \cdot 20$ = lahun-kal, $400 = 20^2$ = bak, $800 = 2 \cdot 400$ = ca-bak, $1200 = 3 \cdot 400$ = ax-bak usw. Geschrieben wurden die Zahlen von unten nach oben. Dabei galten einzelne Punkte (Cacaobohnen, Maiskörner) für 1, 2, 3, 4; ein horizontaler Strich —— war ho = 5, zwei horizotale Striche ═══ waren lahun = 10, also $\underset{=}{...}$ 13. Die weitere Entwicklung führte zu einem Positionssystem, das auf Seite 7 behandelt wird.

Die *Azteken* schrieben für die Einer Punkte, für 20 einen Wimpel P, für $400 = 20^2$ eine Vogelfeder und für $8000 = 20^3$ einen Beutel (voll Bohnen oder Körner):



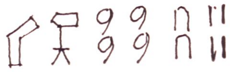
d) Das Dezimalsystem

Die Zahl der Finger an beiden Händen veranlaßte viele Volksstämme, als Grundwert ihres Zahlensystems die Zahl 10 festzulegen, so die Chinesen, Phöniker, Hebräer, Peruaner, Inder. Bei einzelnen Völkern erhielten die Ziffern einen Stellenwert.

e) Die alten Ägypter

Die Zahlzeichen der alten Ägypter enträtselte in der Hauptsache der Franzose Jomard um 1812. Sie gehören zum dezimalen System. Für jede Potenz von 10 waren eigene Zeichen vorhanden, die additiv gesetzt wurden.

Für die Einer von 1—9 gab es einfache Striche wie I, II, III usw. Das Zeichen für 10 war ein Bienenkorb, für 100 galt der Schnörkel, für 1000 eine Lotosblüte, für 10 000 ein geknickter Finger, für 100 000 aber ein sitzender Frosch.

11 424 wurde also geschrieben als 

II. Das Positions-System

Unser heutiges Zahlensystem beruht auf der Grundzahl 10 und deren Potenzen als Stufenzahlen. Jede Zahl ist aufgebaut nach dem Schema

$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 \ldots\ldots$

z. B. $35629 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

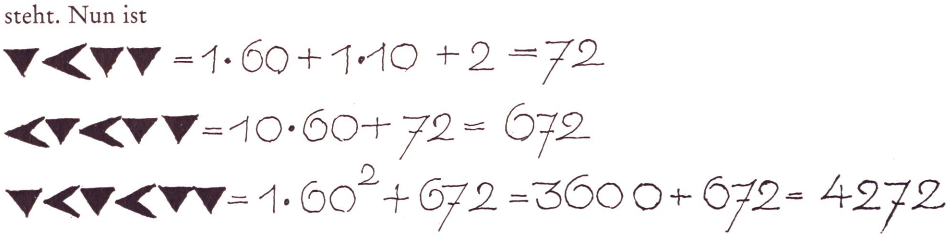
Die Zehnerpotenzen werden nicht angeschrieben, sie sind an der Stellung der einzelnen Ziffern erkennbar; jede Ziffer hat also einen Stellen- oder Positionswert. Wahrscheinlich stammt dieses System von den Sumerern, bei denen es nachweisbar schon im vierten Jahrtausend vor Christus im unteren Euphrattal vorkommt. Als ihr Land von den Babyloniern besetzt wurde, nahm, wie so oft, der Sieger die Kultur des Unterworfenen an, die Babylonier übernahmen das dekadische System der Sumerer, auch deren Zahlenschrift.

a) Die Babylonier

Im dezimalen Zahlensystem der Babylonier wurden die Zahlen mit Griffeln auf weiche Tontafeln geschrieben und nahmen dabei keilförmige Formen an.

Ein senkrechter Keil war das Zeichen für die Einheit, ein Winkelhaken für Zehn. Es war schließlich:

Neben diesem dekadischen System entwickelte sich ein sexagesimales Positions-System mit der Grundzahl 60. In diesem ist es nicht mehr gleich, an welcher Stelle der Einerkeil steht. Nun ist



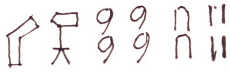
d) Das Dezimalsystem

Die Zahl der Finger an beiden Händen veranlaßte viele Volksstämme, als Grundwert ihres Zahlensystems die Zahl 10 festzulegen, so die Chinesen, Phöniker, Hebräer, Peruaner, Inder. Bei einzelnen Völkern erhielten die Ziffern einen Stellenwert.

e) Die alten Ägypter

Die Zahlzeichen der alten Ägypter enträtselte in der Hauptsache der Franzose Jomard um 1812. Sie gehören zum dezimalen System. Für jede Potenz von 10 waren eigene Zeichen vorhanden, die additiv gesetzt wurden.

Für die Einer von 1—9 gab es einfache Striche wie I, II, III usw. Das Zeichen für 10 war ein Bienenkorb, für 100 galt der Schnörkel, für 1000 eine Lotosblüte, für 10 000 ein geknickter Finger, für 100 000 aber ein sitzender Frosch.

11 424 wurde also geschrieben als 

II. Das Positions-System

Unser heutiges Zahlensystem beruht auf der Grundzahl 10 und deren Potenzen als Stufenzahlen. Jede Zahl ist aufgebaut nach dem Schema

$a + b \cdot 10 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^3 + e \cdot 10^4 \ldots\ldots$

z. B. $35629 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

Die Zehnerpotenzen werden nicht angeschrieben, sie sind an der Stellung der einzelnen Ziffern erkennbar; jede Ziffer hat also einen Stellen- oder Positionswert. Wahrscheinlich stammt dieses System von den Sumerern, bei denen es nachweisbar schon im vierten Jahrtausend vor Christus im unteren Euphrattal vorkommt. Als ihr Land von den Babyloniern besetzt wurde, nahm, wie so oft, der Sieger die Kultur des Unterworfenen an, die Babylonier übernahmen das dekadische System der Sumerer, auch deren Zahlenschrift.

a) Die Babylonier

Im dezimalen Zahlensystem der Babylonier wurden die Zahlen mit Griffeln auf weiche Tontafeln geschrieben und nahmen dabei keilförmige Formen an.

Ein senkrechter Keil war das Zeichen für die Einheit, ein Winkelhaken für Zehn. Es war schließlich:

Neben diesem dekadischen System entwickelte sich ein sexagesimales Positions-System mit der Grundzahl 60. In diesem ist es nicht mehr gleich, an welcher Stelle der Einerkeil steht. Nun ist

 $= 1 \cdot 60 + 1 \cdot 10 + 2 = 72$

 $= 10 \cdot 60 + 72 = 672$

 $= 1 \cdot 60^2 + 672 = 3600 + 672 = 4272$

b) Das Positions-System der Mayas

Schon auf Seite 6 wurde gezeigt, daß die Mayas ein Vigesimalsystem hatten, das von 20 ab in Potenzen von 20 aufgebaut war. In der Hochblüte ihrer Kultur (ca. 700 nach Christus) schrieben sie außer den Fünferstrichen nur noch Punktreihen, die nach Potenzen von Zwanzig von unten nach oben angeordnet waren.

$$\text{So war}\quad \left.\begin{array}{r} ..= 2\cdot 20^3 \\ . = 1\cdot 20^2 \\ ... = 3\cdot 20^1 \\ \underline{...} = 8 \end{array}\right\}\quad \text{gleich } 16\,000 + 400 + 60 + 8 = 16\,468$$

c) Andere Systeme

Bevor wir nun zum Rechnen in den verschiedenen Zahlensystemen übergehen, wollen wir noch ein paar Systeme erwähnen, die etwas ungewohnt erscheinen.

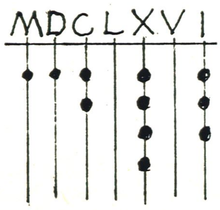
Chamisso erzählt in seiner Arbeit „Hawaiische Sprachen", S. 57, daß in dem volkstümlichen Rechensystem der Hawaiis vielleicht die Zahl der vier Gliedmaßen als Grundzahl angenommen, aber dann dezimal in Potenzen von 10 weiterentwickelt worden sei. Also 1 kauna = 4, 10 kauna = 40, 100 kauna = 400, 1000 kauna = 4000 usw.

Noch überraschender ist das System der Neuseeländer, die ein Elfersystem (Undezimales System) aufbauten. Die Stufenzahlen waren 11, $11 \cdot 11 = 121$, $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$; $22 = 2 \cdot 11$, $33 = 3 \cdot 11$, $110 = 10 \cdot 11$.
(Balbi, Introduktion, S. 256.)

III. Das Rechnen mit römischen Zahlen

Schon die alten Ägypter und Griechen benützten Rechenbretter, die mit Staub, Mehl oder feinem Sand überstreut und in senkrechte Reihen eingeteilt wurden, über denen die verschiedenen Stufenzahlen geschrieben waren. So ein Staubbrett hieß auf griechisch ἄβαξ (Abax). Die Römer übernahmen diese Einrichtung von den Griechen und nannten so ein Rechenbrett abacus. Die einzelnen Ziffern einer Zahl wurden durch Marken angezeigt.

Die Zahl MDCCXXXXIII wurde also folgendermaßen unter den sieben Stufenzahlen eingetragen:



Die praktischen Römer bauten bald metallene Rechenbretter mit senkrechten Rillen, in welche Stifte mit Knöpfen eingesteckt wurden. Das Addieren bot dann keinerlei Schwierigkeiten, z. B. MDCCXXXXIII + CCCCXXXV = 1743 + 435
= 2178

b) Das Positions-System der Mayas

Schon auf Seite 6 wurde gezeigt, daß die Mayas ein Vigesimalsystem hatten, das von 20 ab in Potenzen von 20 aufgebaut war. In der Hochblüte ihrer Kultur (ca. 700 nach Christus) schrieben sie außer den Fünferstrichen nur noch Punktreihen, die nach Potenzen von Zwanzig von unten nach oben angeordnet waren.

So war
$$\left.\begin{array}{r} ..= 2\cdot 20^3 \\ .= 1\cdot 20^2 \\ ...= 3\cdot 20^1 \\ \underline{...}= 8 \end{array}\right\}\quad \text{gleich } 16\,000 + 400 + 60 + 8 = 16\,468$$

c) Andere Systeme

Bevor wir nun zum Rechnen in den verschiedenen Zahlensystemen übergehen, wollen wir noch ein paar Systeme erwähnen, die etwas ungewohnt erscheinen.

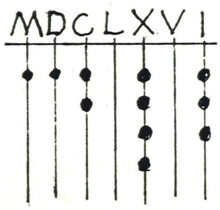
Chamisso erzählt in seiner Arbeit „Hawaiische Sprachen“, S. 57, daß in dem volkstümlichen Rechensystem der Hawaiis vielleicht die Zahl der vier Gliedmaßen als Grundzahl angenommen, aber dann dezimal in Potenzen von 10 weiterentwickelt worden sei. Also 1 kauna = 4, 10 kauna = 40, 100 kauna = 400, 1000 kauna = 4000 usw.

Noch überraschender ist das System der Neuseeländer, die ein Elfersystem (Undezimales System) aufbauten. Die Stufenzahlen waren 11, $11 \cdot 11 = 121$, $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$; $22 = 2 \cdot 11$, $33 = 3 \cdot 11$, $110 = 10 \cdot 11$.
(Balbi, Introduktion, S. 256.)

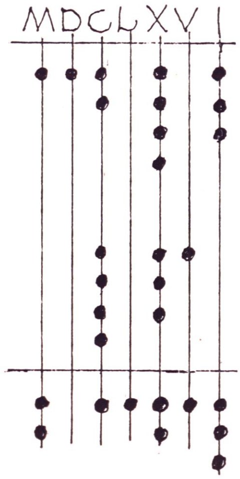
III. Das Rechnen mit römischen Zahlen

Schon die alten Ägypter und Griechen benützten Rechenbretter, die mit Staub, Mehl oder feinem Sand überstreut und in senkrechte Reihen eingeteilt wurden, über denen die verschiedenen Stufenzahlen geschrieben waren. So ein Staubbrett hieß auf griechisch ἄβαξ (Abax). Die Römer übernahmen diese Einrichtung von den Griechen und nannten so ein Rechenbrett abacus. Die einzelnen Ziffern einer Zahl wurden durch Marken angezeigt.

Die Zahl MDCCXXXXIII wurde also folgendermaßen unter den sieben Stufenzahlen eingetragen:



Die praktischen Römer bauten bald metallene Rechenbretter mit senkrechten Rillen, in welche Stifte mit Knöpfen eingesteckt wurden. Das Addieren bot dann keinerlei Schwierigkeiten, z. B. MDCCXXXXIII + CCCCXXXV = 1743 + 435
= 2178



Das Subtrahieren ergibt sich, wenn man von der Summe den einen Summanden abzieht. Die Multiplikation mit Faktoren unter V geht sehr einfach, indem man den Multiplikanden wiederholt addiert, z. B.

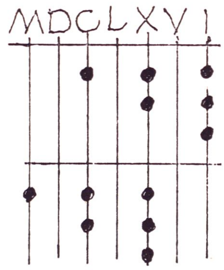
CXXIII · III

C XX III
C XX III
C XX III

CCC L X V IIII

Bei der Multiplikation mit V werden aus den Einern V, aus den Zehnern L und aus den Hunderten D; z. B. CXXIII · V = DLLVVV = D C X V. Bei Multiplikatoren zwischen V und X, z. B. VII multipliziert man mit V und mit II und addiert die erhaltenen Produkte.

Bei der Multiplikation mit X werden die Einer zu Zehnern, die Zehner zu Hunderten und die Hunderter zu Tausender, rücken also am Rechenbrett in die betreffende Reihe



123 · 10
= MCCXXX

Faktoren über 10 werden in günstige Summanden zerlegt. Man braucht also nur das Einmaleins von I bis IIII zu kennen.

Vielfach wurde für Faktoren über fünf das Verfahren der komplementären Multiplikation durch *Fingerrechnen* angewandt. Die Finger beider Hände werden je vom Daumen aus mit 6 bis 10 numeriert. Soll 8 · 9 gerechnet werden, so streckt man den 8-Finger (Mittelfinger) der einen Hand gegen den ausgestreckten 9-Finger (Ringfinger) der anderen Hand. Man zählt die Finger beider Hände vor den ausgestreckten Fingern bis zum kleinen Finger, hier also 2 bzw. 1; ihr Produkt gibt die Einer: 2 · 1 = 2. Dann zählt man die Finger beider Hände zum Daumen hin einschließlich Daumen und ausgestreckten Fingern, hier also 3 bzw. 4. Ihre Summe gibt die Zehner 3 + 4 = 7. Es ist also 8 · 9 = 72.

Bei der Division der römischen Zahlen wird der Divisor mit 2, 3 ... multipliziert, bis man eine Zahl erhält, die nahe am Dividenden liegt und subtrahiert dann

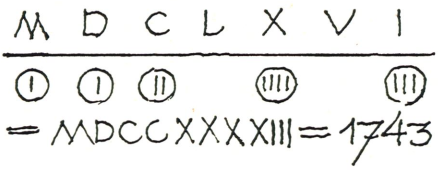
z. B.	XXX : VII	VII
		XIIII
	XXVIII	XXI
	II	XXVIII

also XXX : VII = IIII, Rest II.

Bei der Division durch V wird D zu C, L zu X und V zu I, z. B. LXV : V = XIII.

Bei der Division durch X rücken die Marken des Rechenbretts von links nach rechts um eine Kolumne zurück, z. B. DCCXX : X = CXXII.

Eine Vereinfachung wurde dadurch erzielt, daß man Knöpfe mit Ziffern 1 bis 10 verwendete, so daß beim Anschreiben einer Zahl nur *eine* Reihe von Knöpfen nötig war.



Der Philosoph Boethius, der am Hofe Theoderichs des Großen in Ravenna weilte, hat das Verdienst, das bedeutendste griechische Rechenbuch εἰσαγωγὴ ἀριθμητικὴ des Nikomachus ins Lateinische übersetzt zu haben. Dieses Werk, das etwa im Jahre 30 nach Christus die gesamten arithmetischen Sätze seiner Zeit in einem Buche vereinigte, hat für das Rechnen die gleiche Bedeutung wie die Geometrie des Euklid (um 300 vor Christus).

Boethius führte die oben erwähnten Knöpfe mit Ziffern ein, die er apices nannte. Er fand übrigens keinen Dank am königlichen Hof, wie es die Mathematiker immer wieder erleben mußten (siehe Kepler). Wegen angeblicher geheimer Konspiration mit Byzanz ließ ihn Theoderich im Jahre 524 nach Christus enthaupten, bald hernach auch dessen Schwiegervater Symmachus. Aber der König folgte schon im Jahre 526 seinen Opfern, deren Geister sein zerrüttetes Nervensystem ständig verfolgten. Die Apices des Boethius blieben noch etwa tausend Jahre im Gebrauch, freilich unter anderen Namen. Bei uns hießen sie Rechenpfennig.

Aber nun begann ein eigentümlicher Kampf zwischen dem Rechnen mit römischen Ziffern auf dem Abacus und dem Rechnen mit indischen Ziffern und ihrem Stellenwert.

Schon die alten Babylonier hatten für die Kennzeichnung einer Lücke im sexagesimalen System ein linsenförmiges Zeichen erfunden. Für die dezimale Schreibweise führten die Inder die Null ein. Wann, ist so wenig bekannt wie die Erfindung der indischen Zahlzeichen. Sie tritt erstmals auf in einer Urkunde von 738 nach Christus. Das indische System gelangte über die Araber nach Europa. Die Bezeichnung „arabische" Ziffern ist also eigentlich falsch, es sind indische Ziffern. Bei uns blieben jedoch die römischen Zahlzeichen bis ins 13. Jahrhundert in Gebrauch. Noch im Jahre 1299 wurde in Florenz ein Gesetz erlassen, wonach es den Kaufleuten verboten war, ihre Bücher mit den arabischen (indischen) Ziffern zu führen. Es war ihnen vielmehr vorgeschrieben, römische Zahlzeichen oder die ausgeschriebenen Zahlwörter ohne Ziffer zu gebrauchen. Offenbar glaubte man, daß nicht jedermann imstande sei, die neuen Zahlzeichen zu lesen.

Der arabische Schriftsteller Muhammed Ibn Musa Alchwarizmi schrieb im ersten Viertel des 9. Jahrhunderts nach Christus ein Buch über die indische Rechenkunst. Dieses wurde 300 Jahre später von dem englischen Mönch Adelhart von Bath ins Lateinische übersetzt und beginnt mit den Worten „Gesprochen hat Algorithmus. Laßt uns Gott verdientes Lob sagen, unserem Führer und Verteidiger." Der Name des Verfassers Alchwarizmi ist also in die Form Algorithmi umgeändert; in dieser Umwandlung hat das Wort Jahrhunderte überdauert. Durch die Einführung des Stellenwertes ist das Rechenbrett, der Abacus, überflüssig geworden. Wer mit dem Stellenwert der indischen Ziffern rechnet, ist ein *Algorithmiker*, im Gegensatz zu den Abacisten des Rechenbrettes. Wir sind also Algorithmiker.

Das indische Ziffernsystem brachte hauptsächlich Leonardo von Pisa zur Kenntnis des Abendlandes, der zu Beginn des 13. Jahrhunderts in einem Buch mit dem Titel „Liber abaci" das mathematische Wissen seiner Zeit zusammenfaßte. Alle späteren Rechenbücher wie der Algorismus vulgaris des Engländers Holywood, der mehr durch die italienische Übertragung seines Namens Sacrobosco († 1252) bekannt ist, oder das berühmte Bamberger Rechenbuch des Nürnberger Rechenmeisters Ulrich Wagner vom Jahre 1482, stützten sich in der Hauptsache auf dieses Werk. Dieses Bamberger Rechenbuch wird immer wieder als das erste gedruckte deutsche Rechenbuch bezeichnet. Wenn man den Ton auf das Wort „gedruckt" legt, stimmt diese Angabe. Wir Regensburger können aber stolz sein, daß das *älteste deutsche Rechenbuch* jenes des *Regensburger Benediktinermönches von St. Emmeram Friedrich Gebhard* ist, das schon in den Jahren 1449/50 entstand, allerdings damals nicht gedruckt wurde, sehr einfach, weil die Buchdruckerkunst eben erst 1450 erfunden wurde. Die Pest, an der in Regensburg 6500 Einwohner starben, setzte dem Leben des ausgezeichneten Gelehrten 1462 ein frühes Ende. Von den sechs Handschriften seines Buches, die Gebhard hinterließ, sind sechs nach der Säkularisation nach München gekommen. Der Inhalt dieses Buches zerfällt in drei Teile. Den dritten Teil hat Kurt Vogel im 50. Band der Schriftenreihe zur Bayerischen Landesgeschichte unter dem Titel „Practica des Algorismus Ratisbonensis" herausgegeben.

Freilich hat sich der Abacus noch bis ins siebzehnte Jahrhundert bei uns gehalten, wenn auch die römischen Ziffern allmählich durch die indisch-arabischen Ziffern ersetzt wurden; ja, der Abacus erlebte im 15. Jahrhundert eine neue Blüte, als das „Rechnen auf den Linien" aufkam, das aber in Italien, dem Lande der Kaufleute von Venedig, Genua und Pisa, keine Stätte fand. Die Linien des Rechenbrettes wurden jetzt horizontal gestellt und die Marken (Rechenpfennige) oder auch Kugeln horizontal verschoben, so wie wir es heute an dem Spielzeug für Kinder sehen.

In Rußland rechnet das einfache Volk heute noch mit verschiebbaren Kugeln, und zwar mit größter Gewandtheit.

B Künstliche Systeme

a) Das ternäre System

$$1 + 2 = 10$$

Eigentlich ist es zu verwundern, daß nur die Finger und die Zehen als Grundlage für die gebräuchlichsten Zahlensysteme genommen wurden. Wenn unsere Stammeltern vorausgesehen hätten, daß sich die Schulkinder beim Dezimalsystem mit dem Einmaleins von 2 bis 9, oder gar mit dem Einmaleins von 2 bis 59 beim Sexagesimalsystem abplagen müßten, und wenn sie Mathematiker gewesen wären, so hätten sie vielleicht gesagt: Nehmen wir lieber eine kleinere Grundzahl, etwa 3. Die 3 Glieder eines Fingers hätten sie eigentlich dazu veranlassen können.

Die Zahlen im Positionssystem sind gebildet nach dem Schema $Z = ax^0 + bx^1 + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots$, wobei x die Grundzahl sein soll. Nimmt man die Grundzahl 3, so sind die Zahlen im ternären System folgendermaßen aufgebaut

$$Z_3 = a \cdot 3^0 + b \cdot 3^1 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 + e \cdot 3^4 = a + 3b + 9c + 27d + 81e \ldots..$$

Da die Grundzahl 3 ist, müssen wir sie im ternären System als 10 schreiben und nur die Ziffern 0, 1 und 2 zulassen. Die Potenzen von 3 werden nur durch ihre Stellung angedeutet.

Es ist dann

dezimal	ternär	dezimal	ternär
1	1	13	111
2	2	14	112
3	10	15	120
4	11	16	121
5	12	18	200
6	20	20	202
7	21	25	221
8	22	26	222
9	100	27	1000
10	101	30	1010
11	102	40	1111
12	110		

Will man eine dezimale Zahl in eine ternäre verwandeln, so dividiert man sie durch die Grundzahl 3; der Rest liefert die Einer der dezimalen Zahl. Der erhaltene Quotient wird wieder durch 3 dividiert; der Rest liefert die Zehner der gesuchten Zahl usw.

Einfache Beispiele: $4 : 3 = 1$ Rest 1
$1 : 3 = 0$ Rest 1

also: $4_{10} = 11_3$ *)
oder: $7 : 3 = 2$ Rest 1
$2 : 3 = 0$ Rest 2

also: $7_{10} = 21_3$ oder anders: $7 = 2 \cdot 3 + 1 = 21$

oder:
$128 : 3 = 42$ Rest 2
$42 : 3 = 14$ Rest 0
$14 : 3 = 4$ Rest 2
$4 : 3 = 1$ Rest 1
$1 : 3 = 0$ Rest 1

also ist $128_{10} = 11202_3$

Eine andere Möglichkeit:

Die Potenzen von 3 lauten: 3, 9, 27, 81, 243 usw.
Es ist also $128 = a \cdot 81 + b \cdot 27 + c \cdot 9 + d \cdot 3 + e$
Man dividiert nun 128 durch 81, den Rest durch 27, den 2. Rest durch 9 usw.

	$128 : 81 = 1$	$a = 1$
Rest	$47 : 27 = 1$	$b = 1$
Rest	$20 : 9 = 2$	$c = 2$
Rest	$2 : 3 = 0$	$d = 0$
Rest 2		$e = 2$

Ergebnis: $128_{10} = 11202_3$

Will man eine ternäre Zahl in eine dezimale verwandeln, so dividiert man durch 101 (3 = 10 dezimal!) und verfährt wie oben.

Aufgabe: Man soll 11202_3 in eine dezimale Zahl verwandeln.

$$
\begin{array}{l}
11202 : 101 = 110 \\
-\,101 \\
\hline
110 \\
-\,101 \\
\hline
22 : 101 = 0, \text{ Rest } 22_3 = 8_{10}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Quotient} & 110 : 101 = 1, \text{ Rest } \; 2 = 2 \\
& -\,101 \\
\hline
& 2 \\
\text{Quotient} & 1 : 101 = 0, \text{ Rest } \; 1 = 1
\end{array}
$$

also $11202_3 = 128_{10}$

oder anders: $11202_3 = 1 \cdot 81 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 = 128$

*) Die Grundzahl wird von nun an als Index an die betreffende Zahl gehängt. So bedeutet also 4_{10}, daß die Zahl 4 im Zehnersystem gemeint ist.

b) Die tetractysche Rechenkunst des Professors Erhard Weigel

1 + 3 = 10

Erhard Weigel war geboren am 16. Dezember 1625 in Weiden, Oberpfalz, studierte in Halle Mathematik und Astronomie, schlug sich durch Nachhilfeunterricht recht und schlecht durch, wurde im Jahre 1652 Universitätsprofessor in Jena und starb dort am 21. März 1699. Zwei Probleme beschäftigten den Rastlosen sein Leben lang: einmal eine längst fällige Kalenderreform und zum anderen eine Änderung des dezimalen Zahlensystems, etwa durch Einführung der Grundzahl 4. Für den Gregorianischen Kalender trat er vor dem Reichstag in Regensburg ein, der Grundzahl 4 widmete er in einer seiner 104 Abhandlungen ein besonderes Kapitel, das den Titel trägt: „Neu erfundene Tetractysche Rechenkunst." Bemerkenswert ist, daß der berühmte Leibniz einige Zeit in Jena sein Schüler war. In Halle hatte sich der berühmte Astronom Schimpfer des jungen Mathematikers angenommen, der dem Mittellosen das gesamte einträgliche, astrologische Geschäft nebst der Kalendermacherei übertrug. Dem Herzog Wilhelm von Sachsen-Weimar gab er privatissime Unterricht in Astronomie, erhielt von diesem den Titel eines Hofmarschalls und von dessem Sohn noch die Würde eines Oberbaudirektors. Die Universitätskollegen würdigten seine Verdienste, indem sie ihn dreimal zum Rector magnificus wählten.

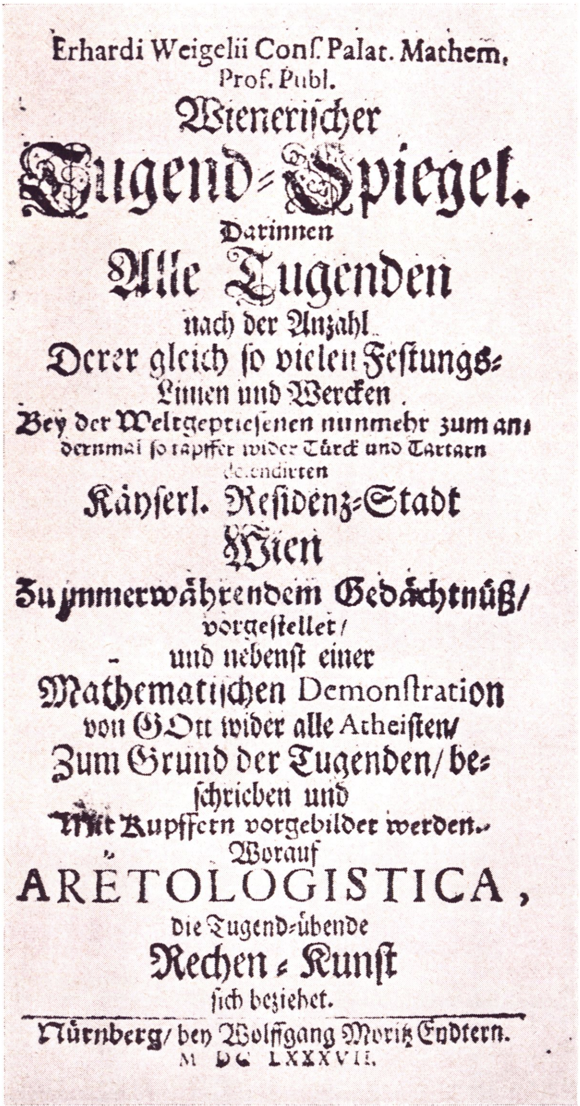
Von seinen Vorlesungen waren ganz besonders berühmt jene des astrologisch-heraldischen Collegiums. Es zog über 400 Zuhörer an und mußte schließlich unter freiem Himmel gehalten werden. Ein Lieblingsthema dieser vielbesuchten Kollegs bildete der sogenannte „Europäische Wappenhimmel". Die bisher aus dem Altertum stammenden gewohnten Sternbilder wurden abgeschafft und durch die Wappen der europäischen Staaten ersetzt. Obwohl diese Neuerung mit großem Beifall begrüßt wurde, konnte sie sich schon wegen der Veränderlichkeit alles Irdischen nicht durchsetzen. Von Weigels vielen technischen Erfindungen ist die *Schnellpresse* erwähnenswert. Doch wollte sie Weigel nicht an die Öffentlichkeit bringen, weil er befürchtete, daß „sie den Buchdruckern Arbeit und Brot nehmen würde".

Weltberühmt war sein Wohnhaus „Domus Weigeliana", das zu den sieben Wundern von Jena gerechnet wurde. Es war dreistöckig und trug noch einen Turm von drei Etagen, der so aufgesetzt war, daß man vom Keller aus durch das Wohnhaus und den Turm hindurch wie durch eine Röhre den Himmel sehen und auf diese Weise selbst bei Tage die Sterne besehen konnte. Das Haus aber hatte keine Treppen. Es gab auch keinen Lift; doch wurden Besucher auf einem Sessel mit Hilfe einer Winde bis zum obersten Stockwerk befördert. (Pongratz, „Naturforscher im Regensburger und ostbayerischen Raum", 1963, Band 25 der Acta Albertina Ratisbonensia des Naturwissenschaftlichen Vereins Regensburg.)

Neben dem „Wienerischen Tugendspiegel" sind besonders erwähnenswert: Speculum uranicum aquilae Romanae sacrum, das ist Himmelsspiegel von den Erscheinungen des Himmels, vorzüglich aber von den Cometen im Gestirn des Adlers, Jena 1661. — Mit Verzeichnis Derer Cometen so vor und nach Christi Geburt von den Astronomen beobachtet worden sind und den Begebenheiten, die darnach erfolgt, Jena 1665. — Speculum terrae des Erdspiegels, darin der Erdkreis und der Comet von 1665 beschrieben wird, 4. Januar 1665.

Ich bringe nun die Einleitung, die Weigel seinem Werk im „Wienerischen Tugendspiegel" gibt.

Einleitung: „An den geneigten Leser: . . .


Erhardi Weigelii Conf. Palat. Mathem. Prof. Publ.
Wienerischer
Tugend-Spiegel.
Darinnen
Alle Tugenden
nach der Anzahl
Derer gleich so vielen Festungs-
Linien und Wercken
Bey der Weltgepriesenen nunmehr zum an-
dernmal so tapffer wider Türck und Tartarn
defendirten
Käyserl. Residenz-Stadt
Wien
Zu ymmerwährendem Gedächtnüß/
vorgestellet/
und nebenst einer
Mathematischen Demonstration
von GOtt wider alle Atheisten/
Zum Grund der Tugenden/ be-
schrieben und
Mit Kupffern vorgebildet werden.
Worauf
ARETOLOGISTICA,
die Tugend-übende
Rechen-Kunst
sich beziehet.
Nürnberg/ bey Wolffgang Moritz Endtern.
M DC LXXXVII.

Was den Verstand des Menschen in natürlichen Dingen anbelangt, so hat Gott zwar allen Menschen gleicherweis die Rechen-Krafft zum Hauptstück ihres Wesens ansigniert, nicht aber gleichermaßen und in eben einem Grad, der Würkung ausgetheilt. Denn es pflegt immer einer besser als der andere zu rechnen. Unterdessen kann ein jeder mit dem Rechengrad, der ihm von Gott verliehen, hier begnügt, und dann glückselig seyn in dieser Welt, wenn er nur die Haupt-Rechnung richtig führt und wol bedenckt, die uns die Christliche Religion mit Werten an die Hand gibt.

Nun gehet zwar die Rechenkunst (auch nur des Inhalts, durch die Ziffern) unaussprechlich tieff: Wir wollen aber hier mehr auf die Tugenden als auf die gewisse Regeln geben in Betrachtung, daß Gott selbst nicht alle Menschen tieff gelehrt im Rechnen haben wollte. Denn zum wenigsten die Helffte aller Menschen, die jemals zugleich auf Erden leben, sind nur Kinder; von der anderen Helffte macht den halben Theil das Frauen-Volck. Das Männer-Viertel hat mehr als den halben Theil gemeiner Leute; dieser Rechnung nach wird kaum ein Sechzehntheiligen aller Menschen kommen, welche mit der Rechen-Krafft hinunter in die Tiefe folgen können. Alle Menschen aber sollen Tugenden üben. Deswegen weil die tieffste Rechnung nicht dazu vonnöten, daß die Tugenden dadurch gelehret werden sollten, wollen wir hier nur die platte oder flache Rechnung treiben."

Nach dieser Einleitung bringt Weigel die Gründe, die für die Wahl der Grundzahl 4 sprechen.

„Es ist handgreiflich, daß in gesamter Rechenkunst zur Leichtigkeit und zur Ersparung des Kopff-brechens kein particular-Mittel so viel würcken möge, als ein durchgehendes und universal-Werck: Dergleichen uns darreichet der, Zweiffelsfrey von den weisen Pythagoras von diesem also heimlich gehaltenen, Vortheil der Creutz-Zahl *Tetractys* genannt, auf welchem mich in bisheriger Nachforschung, nebst Gottes Hülff, hat angeführet, theils der unaussprechliche Preiß, welchen die Pythagorische Weltweisen *) der Vierung (Tetracty) gegeben, so gar, daß sie darauf, als auf ein sonderliches heiliges Werck, die Richtigkeit und festhaltung ihrer Juramenten gegründet: theils die selbst befundene Vortrefflichkeit der *Viere* vor allen anderen Zahlen.

Denn wenn man Viere nur also förmlich betrachtet, so ist sie nicht allein die allererste Summa deren addierte Vielheiten; sondern auch das allererste Product, und als die allererste Geburt derer multiplizirten Vielheiten und Anzahlen; indem sie von der allerersten Anzahl (Zwey) mit sich selbst so wol durch addiren, als auch durch multipliziren, entspringet, welches von keiner einzigen Zahl in der ganzen Welt mehr gesaget werden kan. Nichts desto weniger begreiffet sie beyderley Geschlecht deren Anzahlen, nemlich gerad und ungerad, in sich: und kan durch Halbirung aneinander sich ordentlich biß auf Eins, als auf den Ursprung und Anfang aller Zahlen resolviren lassen.

Wenn man über das die Viere gleichsam materialistische, das ist, in denen Zehlbahren Dingen selber betrachtet, so findet man, daß nicht allein die gantze Natur, sondern auch das gemeine Wesen, als die Moralische Welt, wie denn auch das Notionalische Wesen, und die Verstands-Sachen, alle miteinander gantz einmütig nach der Zahl *Viere* sich richten, indem überall viererlang Geschlecht und Arten sich finden, dadurch sich die Natur und alle die genau zu ermessende bedenckliche Dinge selbst, unter die Vier stecken, und unter derselben sich vorstellig machen, wie solche in unserer Philosophia, klärlich vor Augen gestellet worden, absonderlich aber in der Arithmetischen Moral-Weißheit durchgehend Sonne-clar zu erkennen.

Es hat auch unser Verstand in der Welt sonst keine Zahl, auf welche er sich also fest und füglich steuren solte können, als die *Vier*. Dahero, was er von allerley Figuren zu machen hat, das richtet er erst ins Gevierdte, machet vier Wände, vier Ecken; was er zu ermessen hat, das bringet er, auch die Triangel selbst, zur Quadrat-Mensur. Wenn er etwas zu zehlen hat, ob er gleich von Fingern bis auf Zehne verführet worden, kan er sich doch dabey der Vier nicht entbrechen, sondern im Aussprechen gebraucht er die vier Eck-Namen, *Eins, Zehen, Hundert, Tausend*: im zusammenzehlen, auch deren Zehner Rechen, gebraucht er die Quadrat-Form, als die Flache Zehenmal Zehen und die Cubische, Zehenmal hundert, das ist Tausend. Ja mitten lang der beschwerlichen Zehner-Gewonheit, wenn sich der Verstand nicht so sehr bemühen kan oder will, und gleichsam Händ und Füße, mit Fingern und mit Zeen sincken läst, so hält er sich an die Viere.

Wie denn der gemeine Mann, auf Anleitung der Natur, mit Vier (als mit vier Stricken in einer Fahnen die verkauften Kannen, Scheffel) item mit viermal vier (das ist ein völlig Mandel) mit viermal viermal vier (das ist ein völlig Schock) mehr als mit bloßen Zehen abzehlet."

Mit riesigem Fleiß hat nun Weigel viele Seiten seines Buches mit Tabellen gefüllt, in denen die Zehner- oder Dezimalzahlen in Vierer- oder Creutz-Zahlen umgewandelt sind. Ich bringe einen kleinen Teil dieser Übersicht.

*) Plutarch (De Iside et Osiride) erzählt, daß bei den Pythagoreern die Tetractys oder 36 der allerhöchste Schwur gewesen sei; man habe sie Weltall genannt als Vereinigung der vier ersten geraden und ungeraden Zahlen. $36 = 2 + 4 + 6 + 8 + 1 + 3 + 5 + 7$.

Dezimal	Creutz	Dezimal	Creutz
1	1	32	200
2	2	40	220
3	3	48	300
4	10	50	302
5	11	60	330
6	12	64	1000
7	13	70	1012
8	20	80	1100
9	21	100	1210
10	22	128	2000
11	23	256	10000
12	30	500	13310
13	31	512	20000
14	32	1000	33220
15	33	2000	133100
16	100	3000	232320
17	101	4000	332200
18	102	5000	1032020
19	103	6000	1131300
20	110	7000	1231120
21	111	10000	2130100
22	112	20000	10320200
23	113	30000	13110300
24	120	100000	120122200
25	121		
26	122		
27	123		
28	130		
29	131		
30	132		
31	133		

Die Zahl der *zwei*zifferigen Creutz-Zahlen ist $4^2 - 4 = 12$. Dreizifferige Zahlen gibt es $4^3 - 4^2 = 48$ und der vierzifferigen sind es $4^4 - 4^3 = 192$ und von den sechszifferigen sind es schon 3072.

Weigel zeigt auch, wie man eine Dezimalzahl in eine Creutz-Zahl verwandelt:

„Wenn eine Zehnerzahl gegeben wird, so zerschlage sie in ihre Zehner-Sätze, deren jeder seine Creutz-Zahl in der Tabelle zur Seite steht, und addire dieselben, so ist's reduzirt. Als es sey gegeben 36523, facit 20322223 wie folgt“:

Dezimal		Creutz
30000		13110300
6000		1131300
500		13310
20		110
3		3
36523	=	20322223

Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, wie auch Weigel betont, die Dezimalzahl durch 4 zu teilen und den erhaltenen Quotienten immer wieder durch 4. Bleibt bei diesem Verfahren ein Rest, so wird dieser für die Creutz-Zahl jeweils von links nach rechts angetragen. Bleibt kein Rest, so wird Null angetragen.

36523 : 4 = 9130	Rest 3
9130 : 4 = 2282	Rest 2
2282 : 4 = 570	Rest 2
570 : 4 = 142	Rest 2
142 : 4 = 35	Rest 2
35 : 4 = 8	Rest 3
8 : 4 = 2	Rest 0
2 : 4 = 0	Rest 2

Von unten nach oben gelesen erhalten wir 20322223.

Weigel weist noch auf eine dritte Möglichkeit: man dividiere die Dezimalzahl durch 64 und den Quotienten immer wieder durch 64. Der jeweilige Rest liefert je drei Ziffern der Viererzahl:

$$36523 : 64 = 570; \qquad \text{Rest } 43_{10} = 223_4$$
$$452$$
$$43$$
$$570 : 64 = 8; \qquad \text{Rest } 58_{10} = 322_4$$
$$58$$
$$8 : 64 = 0; \qquad \text{Rest } 8_{10} = 20_4$$
$$\text{also } 36523_{10} = 20322223_4$$

Eine vierte, naheliegende Methode:
Die Potenzen von 4 lauten: 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384 . . .
$36523 = a \cdot 16384 + b \cdot 4096 + c \cdot 1024 + d \cdot 256 + e \cdot 64 + f \cdot 16 + g \cdot 4 + h$
Man dividiert durch die höchst mögliche Potenz 16384 und den Rest jeweils durch die nächst niedrige Potenz.

	36523 : 16384 = 2		a = 2
Rest	3755 : 4096 = 0		b = 0
Rest	3755 : 1024 = 3		c = 3
Rest	682 : 256 = 2		d = 2
Rest	171 : 64 = 2		e = 2
Rest	43 : 16 = 2		f = 2
Rest	11 : 4 = 2		g = 2
Rest	3		h = 3

Ergebnis: $36523_{10} = 20322223_4$

Weigel zeigt uns auch, wie man eine Creutz-Zahl in eine Dezimalzahl verwandeln kann:

20000000	32768
300000	3072
20000	512
2000	128
200	32
20	8
3	3
20322223_4 =	36523_{10}

Man hätte auch die Creutz-Zahl durch ihre Grundzahl 22 (= 10 Dez.) dividieren und so verfahren können wie bei der Verwandlung der Dezimalzahl in eine Creutz-Zahl.

Einfachere Beispiele:

45_{10} soll in eine Creutz-Zahl verwandelt werden:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 45:4 & = & 11 & \text{Rest } 1 \\ 11:4 & = & 2 & \text{Rest } 3 \\ 2:4 & = & 0 & \text{Rest } 2 \end{array}\right\} \quad 45_{10} = 231_4$$

Umgekehrt: 231_4 soll in eine Dezimalzahl verwandelt werden:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 231:22 & = & 10 & \text{Rest } 11 = 5_{10} \\ 10:22 & = & 0 & \text{Rest } 10 = 4_{10} \end{array}\right\} \quad 231_4 = 45_{10}$$

oder: 145_{10} in eine Creutz-Zahl:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 145 . 4 & = & 36 & \text{Rest } 1 \\ 36:4 & = & 9 & \text{Rest } 0 \\ 9:4 & = & 2 & \text{Rest } 1 \\ 2:4 & = & 0 & \text{Rest } 2 \end{array}\right\} \quad 145_{10} = 2101_4$$

Umgekehrt: 2101_4 soll in eine Dezimalzahl verwandelt werden:

$$\left.\begin{array}{lrl} 2101:22 = 9 = & 21_4 & \\ 121 \qquad\quad 5 = & 11_4 & \text{Rest } 11_4 = 5_{10} \\ \hline 11 & 32_4 & \\ & & \\ 32:22 = 1 & & \text{Rest } 10_4 = 4_{10} \\ 10 & & \\ 1:22 = 0 & & \text{Rest } \;\; 1 \;\; = 1 \end{array}\right\} \quad 2101_4 = 145_{10}$$

Addition der Creutz-Zahlen

$$\begin{array}{rcr} 3003 & = & 195_{10} \\ +\;\; 1223 & = & 107 \\ \hline 10232_4 & = & 302_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 231 & = & 45_{10} \\ 1010 & = & 68 \\ \hline 1301_4 & = & 113_{10} \end{array}$$

Wenn beim Addieren eine Teilsumme 4 oder mehr ergibt, so wird 0 oder die 4 überragende Zahl angeschrieben und 1 oder die Hälfte der überragenden Zahl in das nächste Feld nach links addiert.

Subtraktion

$$\begin{array}{rr} & 10232 \\ - & 1223 \\ \hline & 3003 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} & 1301 \\ - & 231 \\ \hline & 1010 \end{array}$$

Hier gilt die Regel: 3 von 2 kann ich nicht, muß ich von der nächsten Ziffer 4 entlehnen.

Multiplikation

$$\begin{array}{r@{}l} 321032 \cdot 123 & \\ \hline 321032 & \\ 1302130 & \\ 2223222 & \\ \hline 120020322 & \end{array}$$

Division

$$\begin{array}{l} 120020322 : 321032 = 123 \\ \underline{321032} \\ 2131112 \\ \underline{1302130} \\ \quad 2223222 \\ \quad \underline{2223222} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

c) Das binäre System des Universalgenies Dr. Gottfried Wilhelm Leibniz

$$1 + 1 = 10$$

Leibniz erblickte am 1. Juli 1646 als Sohn eines Universitätsprofessors in Leipzig das Licht der Welt. Schon mit 13 Jahren bezog er die Universität seiner Vaterstadt und studierte dort Rechtswissenschaft, Philosophie und Mathematik. Für einige Semester hörte er in Jena die Vorlesungen des berühmten Professors Erhard Weigel, der die Vorzüge des tetraktyschen Zahlensystems erwähnte. Hier mag wohl der zündende Funke auf Leibniz übergesprungen sein und in ihm den Gedanken an das binäre System ausgelöst haben, der ihn zeitlebens nicht mehr verließ. Als man dem Fünfzehnjährigen die Zulassung zur Doktorprüfung verweigerte, ging der Unverdrossene an die Universität Altdorf bei Nürnberg; dort wurde er zum Dr. jur. promoviert. Einige Jahre später kam der Protestant an den kurfürstlichen Hof des katholischen Bischofs von Mainz und übernahm dort die Mitarbeit an einer Neuordnung des römischen Rechts. Für die von ihm erfundene Rechenmaschine konnte er nirgends einen Mechaniker finden, auch nicht in Paris, wo er in diplomatischer Mission weilte. Aber die Begegnung mit Christian Huyghens war für ihn der Anlaß, sich intensiver mit Mathematik zu befassen. Und schon im Jahre 1675 erfand er in völliger Unabhängigkeit die Infinitesimalrechnung, die ihn freilich mit Newton und den Engländern in Konflikt brachte. Am Hofe des Kurfürsten Ernst August in Hannover reifte nun endgültig der Plan für das binäre Zahlensystem, in dem er, der tiefgläubige Christ, geheimnisvolle, göttliche Kräfte vermutete (1679). Nach einigen Jahren, die er am Hofe des Kaisers in Wien verbrachte, kehrte er im Jahre 1714 nach Hannover zurück. Dort starb er einsam und ohne Pflege am 14. November 1716.

Leibniz war sich wohl bewußt, daß man jede beliebige Zahl als Grundzahl eines Systems wählen könne. So ist z. B.
$161_{10} = 188_9 = 241_8 = 287_7 = 425_6 = 2201_4 = 12222_3 = 10100001_2$

Leibniz erwähnte des Spaßes halber im Freundeskreis, daß man natürlich auch 14 als Grundzahl nehmen könne; aber dann müsse man von 10 bis 13 einschließlich neue Zahlzeichen einfügen, also $10_{10} = A$, $11_{10} = B$, $12_{10} = C$ und $13_{10} = D$. 14_{10} ist dann gleich 10_{14}.

Aber Leibniz betonte immer wieder, daß 2 die einzig brauchbare Grundzahl sei, weil beim binären System nur mehr die Ziffern 0 und 1 vorkämen — prophetische Worte, die erst in den letzten Jahren bei den elektronischen Rechenmaschinen ihre Bestätigung fanden.

Multiplikation

$$\begin{array}{r}
321032 \cdot 123 \\
\hline
321032 \\
1302130 \\
2223222 \\
\hline
120020322
\end{array}$$

Division

$$\begin{array}{l}
120020322 : 321032 = 123 \\
\underline{321032} \\
2131112 \\
\underline{1302130} \\
2223222 \\
\underline{2223222} \\
0
\end{array}$$

c) Das binäre System des Universalgenies Dr. Gottfried Wilhelm Leibniz

$$1 + 1 = 10$$

Leibniz erblickte am 1. Juli 1646 als Sohn eines Universitätsprofessors in Leipzig das Licht der Welt. Schon mit 13 Jahren bezog er die Universität seiner Vaterstadt und studierte dort Rechtswissenschaft, Philosophie und Mathematik. Für einige Semester hörte er in Jena die Vorlesungen des berühmten Professors Erhard Weigel, der die Vorzüge des tetraktyschen Zahlensystems erwähnte. Hier mag wohl der zündende Funke auf Leibniz übergesprungen sein und in ihm den Gedanken an das binäre System ausgelöst haben, der ihn zeitlebens nicht mehr verließ. Als man dem Fünfzehnjährigen die Zulassung zur Doktorprüfung verweigerte, ging der Unverdrossene an die Universität Altdorf bei Nürnberg; dort wurde er zum Dr. jur. promoviert. Einige Jahre später kam der Protestant an den kurfürstlichen Hof des katholischen Bischofs von Mainz und übernahm dort die Mitarbeit an einer Neuordnung des römischen Rechts. Für die von ihm erfundene Rechenmaschine konnte er nirgends einen Mechaniker finden, auch nicht in Paris, wo er in diplomatischer Mission weilte. Aber die Begegnung mit Christian Huyghens war für ihn der Anlaß, sich intensiver mit Mathematik zu befassen. Und schon im Jahre 1675 erfand er in völliger Unabhängigkeit die Infinitesimalrechnung, die ihn freilich mit Newton und den Engländern in Konflikt brachte. Am Hofe des Kurfürsten Ernst August in Hannover reifte nun endgültig der Plan für das binäre Zahlensystem, in dem er, der tiefgläubige Christ, geheimnisvolle, göttliche Kräfte vermutete (1679). Nach einigen Jahren, die er am Hofe des Kaisers in Wien verbrachte, kehrte er im Jahre 1714 nach Hannover zurück. Dort starb er einsam und ohne Pflege am 14. November 1716.

Leibniz war sich wohl bewußt, daß man jede beliebige Zahl als Grundzahl eines Systems wählen könne. So ist z. B.
$161_{10} = 188_9 = 241_8 = 287_7 = 425_6 = 2201_4 = 12222_3 = 10100001_2$

Leibniz erwähnte des Spaßes halber im Freundeskreis, daß man natürlich auch 14 als Grundzahl nehmen könne; aber dann müsse man von 10 bis 13 einschließlich neue Zahlzeichen einfügen, also $10_{10} = A$, $11_{10} = B$, $12_{10} = C$ und $13_{10} = D$. 14_{10} ist dann gleich 10_{14}.

Aber Leibniz betonte immer wieder, daß 2 die einzig brauchbare Grundzahl sei, weil beim binären System nur mehr die Ziffern 0 und 1 vorkämen — prophetische Worte, die erst in den letzten Jahren bei den elektronischen Rechenmaschinen ihre Bestätigung fanden.

Ich bringe nun eine Tabelle der Dezimalzahlen von 1 bis 100 und der zugehörigen Binärzahlen, die auf Leibniz zurückgeht.

Dezimal	Binär	Dezimal	Binär	Dezimal	Binär
1	1	41	101001	81	1010001
2	10	42	101010	82	1010010
3	11	43	101011	83	1010011
4	100	44	101100	84	1010100
5	101	45	101101	85	1010101
6	110	46	101110	86	1010110
7	111	47	101111	87	1010111
8	1000	48	110000	88	1011000
9	1001	49	110001	89	1011001
10	1010	50	110010	90	1011010
11	1011	51	110011	91	1011011
12	1100	52	110100	92	1011100
13	1101	53	110101	93	1011101
14	1110	54	110110	94	1011110
15	1111	55	110111	95	1011111
16	10000	56	111000	96	1100000
17	10001	57	111001	97	1100001
18	10010	58	111010	98	1100010
19	10011	59	111011	99	1100011
20	10100	60	111100	100	1100100
21	10101	61	111101	128	10000000
22	10110	62	111110	256	100000000
23	10111	63	111111	512	1000000000
24	11000	64	1000000		
25	11001	65	1000001		
26	11010	66	1000010		
27	11011	67	1000011		
28	11100	68	1000100		
29	11101	69	1000101		
30	11110	70	1000110		
31	11111	71	1000111		
32	100000	72	1001000		
33	100001	73	1001001		
34	100010	74	1001010		
35	100011	75	1001011		
36	100100	76	1001100		
37	100101	77	1001101		
38	100110	78	1001110		
39	100111	79	1001111		
40	101000	80	1010000		

Dank dem freundlichen Entgegenkommen der Firma Siemens AG. und der Niedersächsischen Landesbibliothek in Hannover ist es möglich drei Blätter der lateinischen Originalniederschrift von Leibniz mit Datum vom 15. März 1679 aus dem Werk „Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins" zu bringen. Die Originalstellen erscheinen in Kursivschrift; sie werden jeweils mit den zugehörigen Anfangswörtern zitiert, auf die dann die deutsche Übersetzung folgt.


GOTTFRIDVS·GVILIELMVS·LEIBNIZIVS· S.mo ELECT· BRVNS· LVNEB· AB·INT· CONSIL·
Hoc duce in immensi penetravimus intima veri,
Nec probat autorem mens magis ulla Deum.
Bernigeroth fc.

Adscripta progressio facile continueri potest . . .

Die nebenstehende Reihe kann leicht fortgesetzt werden, wenn man von links nach rechts schreibend unter die Eins der oberen Zahl jeweils 0 schreibt, bis bei der oberen Zahl auch 0 vorkommt; unter diese 0 schreibt man dann 1; die übrigen Ziffern bleiben unverändert.

So wird aus 1010111 (= 87)
1011000 (= 88)

Idem est . . .

Ebenso ist $2^6 + * + 2^4 + 2^3 + ***$

$$64 \quad + 16 + 8 \qquad \begin{array}{r} 64 \\ 16 \\ 8 \\ \hline 88 \end{array}$$

Nam 1 in quarto loco . . .

Denn 1 an vierter Stelle bedeutet die dritte Potenz der Grundzahl, im dezimalen System also 1000 und in unserem Zweiersystem die dritte Potenz von 2, also 8. Ähnlich bedeutet 1 an der fünften Stelle die vierte Potenz von 2, also 16 und an der sechsten Stelle 32 und an der siebten Stelle 64.

Notandum si in progressione . . .

Zu bemerken ist, wenn man in der Reihe von oben nach unten geht, daß die Eins immer in regelmäßigen Abständen wiederkehrt, und zwar kommt 1 an der letzten Stelle immer wieder nach links Null, an der vorletzten Stelle, die dem Quadrat entspricht, nach 2 Nullen, an der drittletzten nach 4 Nullen, an der vierten nach $2^3 = 8$ Nullen, an der fünften nach $2^4 = 16$ Nullen.

Einige Unstimmigkeiten in diesem Abschnitt hat Herr Heinz Gumin bereinigt.

Affine . . . offerre se videtur modus commodus . . .

Von hier aus scheint sich eine bequeme Art anzubieten, um eine Dezimalzahl in eine dyadische) umzuwandeln. Es handle sich um die Zahl 365.*

Man nehme nacheinander die Hälfte, dann die Hälfte der Hälfte und schreibe immer den Rest neben diesen halben Wert. Dann ergeben diese Hälften von unten nach oben gelesen den gesamten dyadischen Ausdruck. Also ist $365_{10} = 101101101_2$

365	
182	Rest 1
91	0
45	1
22	1
11	0
5	1
2	1
1	0
	1

Ein besonderer Vorschlag sei an dieser Stelle gestattet: Man könnte nach dem Beispiel Weigels Seite 18 die Dezimalzahl durch die dritte Potenz der Grundzahl, hier also 8, dividieren und bekäme dann die Binärzahl in Gruppen zu drei Ziffern:

$365 : 8 = 45$ Rest $5 = 101_2$
$45 : 8 = 5$ Rest $5 = 101$
$5 : 8 = 0$ Rest $5 = 101$
also ist $365_{10} = 101101101_2$

*) Leibniz gebraucht später den Ausdruck „binär".

15 Martii 1679.

De Progressione Dyadica – Pars I.

Numeratio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111	100000

Adjiciatur progressio facile continuari potest incipiendo a dextra sinistrorsum, ut superstanti numero unitates subscribere 0. donec occurrat in superstante etiam 0. cui subscribitur 1. nec ultra pergi opus, nam reliqui characteres manent ut in superstante, ita ex 1010111 87 fit 1011000 88.

Idem est ac si diceres: 1011000 esse $2^6 + * + 2^4 + 2^3 + * * *$
$64 + 16 + 8$

Nam 1 in quarto loco seu 1000 significat cubum fundamenti progressionis, ut etiam in communi progressione significat cubum denarii. Ita in nostra cubum a binario nempe octo. Similiter 1 in quinto loco significat quadrato-quadratum seu 16, et in sexto significat surdesolidum seu 32, et in septimo denique quadrato-cubum seu 64.

Notandum est in progressione descendas perpendiculariter characteres numeri superioris ac characteres directe subjectos numerorum inferiorum, semper unitates redire in ultimo loco redire unitatem post unum per saltus, et in penultimo post unum zero. At in secundo loco seu quadraticum redire post tria zero. At in tertio loco seu cubicum post septem zero interjecta. In quarto loco seu quadrato quadratico post quindecim.

Affine jam ostensum esse videtur. Unde commode transformandi expressionem dati numeri decadicam in dyadicam: sit numerus 365 ejus continue sumatur dimidium et dimidium dimidii residua semper e regione indicatis scriptis, et characteres ordine ita ut imus fit sinisterrimus, et ita prodibit expressionem dyadicam quaesitam.

365	1
182	0
91	1
45	1
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1

Eadem methodus servari potest pro quacunque progressione in aliam convertenda. Itaque 365 erit 101101101.

100000000	256
1000000	64
100000	32
1000	8
100	4
1	1
	365

256 + 109 = 365

Simili arte dyadica convertetur in decadicam vel addendo in unam omnes binarii potestates decadice expressas ut hoc loco 256. 64. etc. vel etiam dyadice dividendo per denarium decadice expressum, residuis ordine collocatis, eodem quo dixi modo: ut

Dividatur per 1010)	101101101	101 Residuum 5
quotiens primus	100100	110 Residuum 6
	11	3

Und eine dritte Möglichkeit:

$365 = a \cdot 256 + b \cdot 128 + c \cdot 64 + d \cdot 32 + e \cdot 16 + f \cdot 8 + g \cdot 4 + h \cdot 2 + i$

Dividiere 365 durch 256 und den Rest durch 128 usw.

	365 : 256 = 1	a = 1	
Rest	109 : 128 = 0	b = 0	
Rest	109 : 64 = 1	c = 1	
Rest	45 : 32 = 1	d = 1	
Rest	13 : 16 = 0	e = 0	
Rest	13 : 8 = 1	f = 1	
Rest	5 : 4 = 1	g = 1	
Rest	1 : 2 = 0	h = 0	
Rest	1	i = 1	Ergebnis: $365_{10} = 101101101_2$

Leibniz zeigt, wie die umgekehrte Aufgabe gelöst wird.

Eodem Methodo . . .

Nach dem gleichen Verfahren wird eine dyadische Zahl in eine dekadische verwandelt. Sei es durch Addieren aller dekadisch ausgedrückten Zweierpotenzen oder auch indem man die gegebene dyadische Zahl durch 1010, den dyadischen Wert von 10 dividiert und den Rest wie schon oben erwähnt anschreibt.

Z. B. 101101101	*100000000 gleich*	*256*
	1000000	*64*
	100000	*32*
	1000	*8*
	100	*4*
	1	*1*
		365

Dividatur per 1010)	*101101101*	
	100100	*Rest 101 gleich 5*
	110	*Rest 110 gleich 6*
	11	*Rest 11 gleich 3*

Also ist $101101101_2 = 365_{10}$

Addition binärer Zahlen

Additio Numerorum hoc methodo tam facile est . . .

Das Addieren der Zahlen ist bei dieser Methode so leicht, daß diese nicht schneller diktiert als addiert werden können. Man braucht die Zahlen gar nicht zu schreiben, sondern kann die Summe sofort hinschreiben.

Exempli causa dictatur

Z. B. diktiert man	*zuerst*	*10110 gleich*	*22*)*
	dann	*1011*	*11*
scribo statim — ich schreibe sofort		*100001*	*33*

Seu si columnes plures addendae . . .

Oder wenn mehr Zeilen zu addiern sind.

$$
\begin{array}{r@{\;=\;}r}
10110110 & 182\text{*)} \\
11100101 & 229 \\
1001100 & 76 \\
1010111 & 87 \\
11011011 & 219 \\
\hline
1100011001 & 793_{10}
\end{array}
$$

*) Zusätze des Verfassers

Additio Numerorum hac methodo tam facilis est ut non citius possint dictari, quam addi; ita ut non scribi necesse sit numeros sed statim scribi possit summa. Exempli causa dictatur mihi primus 10110, postea 1001, tertius 100000 [illegible]

Sed si columnae plures addendae, numerentur unitates columnae, si numerus par scribatur sub ea nihil, et dimidius numeri unitatum asscribatur columnae sequenti sive punctis sive numeris communibus atque ita addendum in hac progressione tantum est posse numerare ~~[illegible]~~ unitates, cum in aliis opus sit scire addere posse numeros simplices, verbi gratia 8 et 5 facit 13. quod hic non opus est memoriae addere in decadica progressione necessarium.

ut

```
   1011110
   1100101
   1001100
   1010101
   1101101
 ---------
 110001101
```

Eadem methodo facillime procedit subtractio, imo et mixta additionis et subtractionis. Tantum enim colligendae unitates. ~~Numerentur~~ Quando autem miscetur additio subtractio, ~~et~~ ante ~~[illegible]~~ detrahendae respondentes numeros addenda: nam hi se invicem destruunt.

Verbi gratia:

in columna A. incipe ab Linea L est cum signo + ipsique punctetur simul hoc 1 cum alio 1 quod est in P. cum signo — similiter in M est + 1. punctetur cum — 1 in S. Denique in N est + 1 punctetur una cum — 1 in X. erunt omnia 1. punctata et restabunt + 1 non punctata

```
   ~~vel~~              A
 + 1011101          L
 + 1001101          M
 + 1010101          N
 − 1110011          P
 ~~[illegible]~~
 −                  0
 +                  1
 −                  1
 +                  1
 +                  1
 −                  1
```

```
      A
 L    1    +
 M    1    +
 N    1    +
 P    1    −
 Q    0    −
 R    0    +
 S    1    −
 T    1    +
 V    1    +
 X    1    −
```

quae numerentur ut si sola adessent ex sequenti columnae ascribantur cum suo signo, hic hoc +, alias — si plura superessent — 1.

Et et hoc notandum pro numero ~~subtrahendo~~ ~~[illegible]~~ subtrahendo posse poni ejus supplementum ~~[illegible]~~ ad 1000000 etc. et ita non opus est subtractione ~~[illegible]~~ sed additione ea methodo qua [illegible] etiam in decadica alibi demonstravi ut subtrahendus est numerus 110101, ponatur subtrahi debere ab ~~1000~~

```
  1000000
   001011
   110101
 --------
  1000000
```

patet hic
~~[illegible]~~ cum si simul addas
reddit
~~[illegible]~~ Statim autem scribi potest supplementum hoc modo, si in primo ~~dextro~~ a dextra charactere substituatur idem, in reliquis contrarium, mutando scilicet 0 in 1 et 1 in 0. tandem sub finem notandum [illegible] columnae ad quas nullus est subtrahendi character pertingit subtrahendum unitatem ~~[illegible]~~ si subtractionem per solam supplementalem additionem peragis columnis

Leibniz hat sich übrigens bei der Erklärung des Verfahrens der Addition verschrieben.

Die Erklärung der Addition lautet richtig:

Man zähle die Einsen in einer Spalte; ist ihre Zahl gerade, so schreibe man eine Null darunter, übertrage die Hälfte der Anzahl der Einheiten auf die folgende Spalte. Ist die Summe der Einsen ungerade, dann schreibe man eine Eins darunter; und die Hälfte der Anzahl der Einheiten übertrage man auf die folgende Spalte.

Ich bringe nun noch ein paar einfache Beispiele der Addition:

$$\begin{array}{rcl} 10110 & = & 22 \\ 11011 & = & 27 \\ \hline 110001 & = & 49_{10} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcr} 1010100 & = & 84 \\ 101101101 & = & 365 \\ 110001 & = & 49 \\ \hline 111110010 & = & 498_{10} \end{array}$$

Subtraktion

Nach einer Abhandlung, die Leibniz über gemischte Addition und Subtraktion bringt, gebe ich einige einfache Beispiele über Subtraktion.

$$\text{a)}\ \begin{array}{rcr} 1000000 & = & 64 \\ -\ 110101 & = & 53 \\ \hline 1011 & = & 11_{10} \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{rcr} 1101 & = & 13 \\ -\ 111 & = & 7 \\ \hline 110 & = & 6_{10} \end{array} \qquad \text{c)}\ \begin{array}{rcr} 11111 & = & 31 \\ -\ 10001 & = & 17 \\ \hline 1110 & = & 14_{10} \end{array}$$

Multiplikation

Transeo ad Multiplicationem . . .

Ich gehe nun zur Multiplikation über, wo es klar ist, daß man sich nichts Leichteres vorstellen kann. Denn man braucht keine Pythagoreische Tafel; diese Multiplikation ist die einzige, bei der keine andere vorausgesetzt wird.

Man schreibt nur die Zahl 1 oder an ihrer Stelle 0.

Leibnitz bringt die Multiplikation von $93 \cdot 14 = 1302$.

$$\begin{array}{r} 1011101 \\ \cdot\ 1110 \\ \hline 10111010 \\ 1011101 \\ 1011101 \\ \hline 10100010110_2 \end{array} \begin{array}{l} \\ = 93 \cdot 14 \\ \\ \\ \\ \\ = 1302_{10} \end{array}$$

Ein einfaches Beispiel

$$\begin{array}{r} 101 \cdot 111 \\ \hline 101 \\ 101 \\ 101 \\ \hline 100011_2 \end{array} \begin{array}{l} = 5 \cdot 7 \\ \\ \\ \\ = 35_{10} \end{array}$$

Huius modi calculus fieri posset per machinam . . .

Diese Art von Kalkül könnte auch durch eine Maschine ausgeführt werden.

Ich bringe seine Gedanken über eine Rechenmaschine in einem besonderen Abschnitt Seite 30.

Division

Divisio in hoc calculo fit tum sine tabula pythagoreica tum sine tentatione . . .

Die Division erfolgt bei diesem Kalkül sowohl ohne Pythagoreische Tafel als auch ohne Probieren.

Videamus quo modo . . .

Schauen wir, welches der kürzeste Weg ist.

Dividend 101101101 101 Rest

Divisor 1010 100000 Quotient

Ubi illud nota, si debes subtrahere . . .

Beachte dabei, wenn man 1 von 0 subtrahieren muß, so schreibe man so, als stünde 1 an Stelle von 0. Doch muß dann aus der folgenden 1 eine 0 werden. Wenn aber nicht 1, sondern 0 folgt, so muß jede nachfolgende 0 in 1 umgewandelt werden und die erste 1, auf welche diese 0-Reihe von rechts nach links trifft, wird in 0 verwandelt, ähnlich wie bei der dekadischen Schreibweise, wo 0 in 9 verwandelt wird.

Veniamus ad Multiplicationem. Ubi rursus patet nihil facilius fingi ~~posse~~ posse. Nam nullus opus est tabula pythagorica et hoc solo est multiplicatio nullam aliam multiplicationem jam notam ~~prae~~ praesupponens. Tantum enim subscribitur numerus aut eius loco 0.

```
           1 0 1 1 1 0 1
                 1 1 0 1
    -----------------------
     1 0 1 1 1 0 1
    1 0 1 1 1 0 1
  1 0 1 1 1 0 1
  -------------------------
  1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0
```

Hic igitur calculus fieri posset per machinam ~~sine rotis~~ hoc modo sane facillime et sine sumtu; scil. ~~pyxis perforata~~ ~~ita ut locis ubi est representantur~~ ~~foramina aperiri et claudi possint~~, aperiantur ~~respondentia ipsis~~ ~~sit machinula cum rotis~~ ~~quam~~ pyxis perforata ut foramina aperiri et claudi possint aperta in locis respondentibus ipsis 1, clausa maneant in locis respondentibus ipsis 0. Per loca aperta deponat cubulos vel ~~globulos~~ orbiculos in crenas per alios nihil, et ita promota de columnis in columnas prout postulat multiplicatio crenae representent columnas nec possit orbiculus ~~ex~~ ex una crena in aliam ire nisi postea mota machinula. Ubi globuli effluent omnes in sequentem crenam, demto semper uno qui in foramine ~~clausus~~ ~~ejus~~ ~~impletur~~ manet, si quidem per ~~portas~~ transire velit solus; nam res ita instituti potest ut duos semper simul effluere necessario, alioqui non effluent;

Divisio in hoc calculo fit tum sine tabula pythagorica tum etiam sine tentatione

~~Vulgaris~~ quomodo compendiosissime:

$$\begin{array}{l} \text{Dividendus } 101101101 \quad \text{Residuum} \\ \text{Divisor } 1010) \quad 100100 \end{array}$$ quotiens

~~Nunquam opus delere sufficit~~ vel ~~sit melius subductis dividendis~~ ~~sufficienter dicto~~ ~~quotiens sufficit~~ potest

1010) 101101101
1001

~~Dividendus~~ Dividendus ~~Divisor~~ Divisor (1010)

Residuum 101101101
100100 quotiens

~~1010) 10100~~

1010 10 100100 1010) 11

1010) 1010 100100 11 optime

Vulgaris sic:

ubi illud nota, si debeas subtrahere 1 à 0 ~~tunc~~ scribere te quasi adeptum loco 0. verum in sequenti 1. debet fieri 0. et ipsi quod sic vero non sequatur 1 sed 01 ~~tunc~~ omnia 0 quae sequentur mutantur in 1. et proximum 1 quod est ~~expedit~~ (eundo a dextra versus sinistram) mutatur in 0. prorsus ut in ~~decimali~~ decimalibus, nisi quod ibi mutatur 0 in 9.

$$\begin{array}{r} 0 \; 1 \\ 1 0 0 1 0 0 \\ 1 1 \quad 2 \end{array}$$

Ich bringe nachfolgend ein weiteres Beispiel, das 1728 : 36 = 48 entspricht:

```
  11011000000 : 100100 = 110000
— 100100
————————
    100100
—   100100
————————
         0
```

Leibniz gibt zwar zu, daß das Dezimalsystem bündiger sei, weil die Zahlen nicht so lang seien. Aber das Binärsystem sei trotz seiner Länge das grundlegende System für die Wissenschaft und führe zu neuen Entdeckungen.

Das Überraschende ist, so fährt er weiter, daß diese Arithmetik mit 0 und 1 den Schlüssel liefert zum Geheimnis der Covader Linienzeichen eines alten Königs und Philosophen, genannt Fo-hi, der vor mehr als viertausend Jahren gelebt haben soll und den die Chinesen als den Gründer ihres Reiches und ihrer Wissenschaften betrachten. Man braucht in die von ihm stammenden Cova-Linienzeichen nur für eine durchgehende Linie eine Einheit 1 und für eine unterbrochene Linie eine Null oder 0 setzen. Es ist dann

Cova	binär	dezimal
— — — — — —	000	0
——— — — — —	001	1
— — ——— — —	010	2
——— ——— — —	011	3
— — — — ———	100	4
——— — — ———	101	5
— — ——— ———	110	6
——— ——— ———	111	7

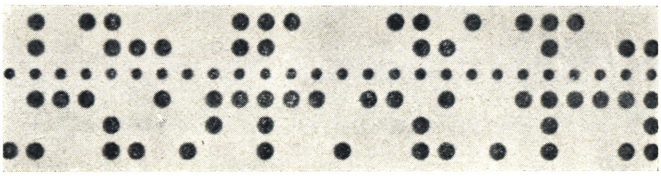
C Anwendung des binären Systems

a) Die Rechenmaschine von Leibniz

Wie schon auf Seite 27 erwähnt, bemühte sich Leibniz während seines Pariser Aufenthaltes vergeblich, für den Bau der von ihm erfundenen Dezimal-Rechenmaschine einen Mechaniker zu finden. Je mehr er sich aber in das binäre Zahlensystem hineinlebte, um so mehr beschäftigte ihn der Plan einer neuartigen Rechenmaschine. Auf Blatt 2 einer lateinischen Handschrift aus der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover vom 15. März 1679 fügt Leibniz seiner Erklärung der Multiplikation mit binären Zahlen folgende Folgerung an:

„Diese Art Kalkül könnte auch mit einer Maschine ausgeführt werden. Auf folgende Weise sicherlich sehr leicht und ohne Aufwand: Eine Büchse soll so mit Löchern versehen sein, daß diese geöffnet und geschlossen werden können. Sie sei offen an den Stellen, die jeweils 1 entsprechen, und bleibe geschlossen an denen, die 0 entsprechen. Durch die offenen Stellen lasse sie kleine Würfel oder Kugeln in Rinnen fallen, durch die anderen nichts. Sie werde so bewegt und von Spalte zu Spalte verschoben, wie die Multiplikation es erfordert. Die Rinnen sollen die Spalten darstellen und kein Kügelchen soll aus einer Rinne in eine andere gelangen können, es sei denn, nachdem die Maschine in Bewegung gesetzt ist. Dann fließen alle Kügelchen in die nächste Rinne, wobei immer einiges weggenommen wird, welches in ein leeres Loch fällt. Denn die Sache kann so eingerichtet werden, daß notwendig immer zwei zusammen herauskommen, sonst sollen sie nicht herauskommen."

Hätte Leibniz seine Idee in die Tat umsetzen können, so hätte die Menschheit schon vor 300 Jahren dieses Geschenk eines Genius kennengelernt und nicht erst jetzt in den modernen Rechenautomaten.



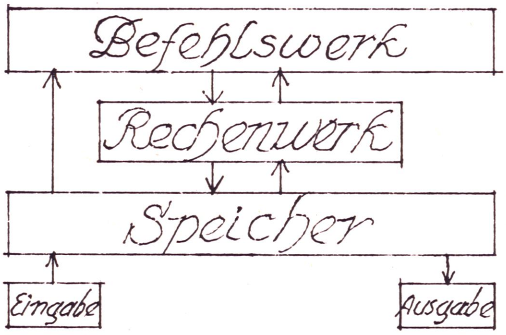
Bevor wir zu den modernen Rechenmaschinen übergehen, wollen wir kurz die Hollerithkarteimaschine behandeln.

Sie besteht aus Lochkarten, die der Deutschamerikaner Hermann Hollerith im Jahre 1886 eingeführt hat. Sie werden vielfach in großen Betrieben gebraucht, die über viele tausend Betroffene eine Übersicht benötigen. Nehmen wir als Beispiel die Kartei einer Polizeizentrale. Diese legt für jeden Betroffenen eine eigene Karte an; in diese wird an einer bestimmten Stelle die bemerkenswerte Eigenschaft des Betreffenden durch ein Loch eingedrückt, aber nicht nur in diese eine Karte, sondern in alle Karten der Zentrale, für welche die gleiche Eigenschaft der Inhaber gilt, und zwar an der gleichen Stelle. Alle bemerkenswerten Eigenschaften wie Körpergröße, Alter, Sprache, Farbe der Haare und Augen, Gesichtsform, Narben, Zähne usw. werden in alle Karten an gleicher Stelle eingestanzt. Wird nun ein Verbrecher gesucht, von dem die Polizei sechs bestimmte Eigenschaften kennt, so werden von den vielen tausend Karten jene herausgesucht, in denen diese sechs Eigenschaften eingestanzt sind. Dies geht auf elektronischem Wege außerordentlich schnell.

b) Programmierte Rechenautomaten

Der Computer

Die modernen Rechenautomaten sind Maschinen, bei denen die Wiedergabe von einzelnen Ziffern durch rasch aufeinanderfolgende Impulse erfolgt. Mit Vorteil werden dabei die Zahlen im dualen (binären) System übertragen, das nur die Ziffern 1 und 0 kennt. Durch einen kurzen Stromstoß wird die Ziffer 1 übertragen; fällt der nächste Stromstoß aus, so erfolgt die Eingabe von 0. Bei den modernen Digitalmaschinen können in der Sekunde Billionen von Impulsen erfolgen. Die Rechenmaschine besteht in der Hauptsache aus einem Eingabewerk, in das die programmierten Rechenaufgaben oder Daten gegeben werden; ferner aus einem Befehls- oder Steuerwerk, von dem sie über das Speicherwerk in den eigentlichen Rechenapparat geleitet werden; von dort gelangen sie schließlich über den Speicher zur Ausgabe.



Zum Einführen von Zahlen in das Eingabewerk dienen mechanische oder lichtelektrische Lochkarten, Lochstreifen und Magnetbänder.

Im Befehlswerk muß zunächst die Reihenfolge der Rechenoperationen festgestellt werden, dann die erforderlichen Rechensymbole (+, —, ·, :) und schließlich der Code, nach dem das Programm in die Maschinensprache verschlüsselt wird. Entweder werden die Dezimalzahlen ins binäre (duale) System umgesetzt oder dezimal ziffernweise nach einem günstigen Code verschlüsselt. Die Dezimalzahl 1302 ist binär gleich 10100010110 und besteht aus 11 Ziffern. Wenn man aber ihre einzelnen Dezimalziffern binär verschlüsselt, so ist die erste Ziffer 1 = 1, die zweite 3 = 11, die letzte 2 = 10 und man erhält dann als dezimalbinäre Zahl 111010, die nur 6 Ziffern enthält, also eine Einsparung (Redundanz) von vier bits (Binärziffern).

Der Speicher

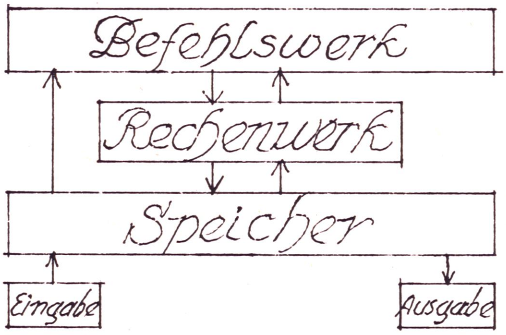
Die Befehle aus dem Steuerwerk gehen meist nicht direkt in das Rechenwerk, sondern über einen oder mehrere Speicher. Einige tausend Zahlen können dort gespeichert werden, von denen jede aus etwa 100 000 Dualziffern bis zu 10 Milliarden bits besteht. Wir können das Speicherwerk etwa mit dem Gedächtnis des menschlichen Gehirns vergleichen.

Gesichtsform, Narben, Zähne usw. werden in alle Karten an gleicher Stelle eingestanzt. Wird nun ein Verbrecher gesucht, von dem die Polizei sechs bestimmte Eigenschaften kennt, so werden von den vielen tausend Karten jene herausgesucht, in denen diese sechs Eigenschaften eingestanzt sind. Dies geht auf elektronischem Wege außerordentlich schnell.

b) Programmierte Rechenautomaten

Der Computer

Die modernen Rechenautomaten sind Maschinen, bei denen die Wiedergabe von einzelnen Ziffern durch rasch aufeinanderfolgende Impulse erfolgt. Mit Vorteil werden dabei die Zahlen im dualen (binären) System übertragen, das nur die Ziffern 1 und 0 kennt. Durch einen kurzen Stromstoß wird die Ziffer 1 übertragen; fällt der nächste Stromstoß aus, so erfolgt die Eingabe von 0. Bei den modernen Digitalmaschinen können in der Sekunde Billionen von Impulsen erfolgen. Die Rechenmaschine besteht in der Hauptsache aus einem Eingabewerk, in das die programmierten Rechenaufgaben oder Daten gegeben werden; ferner aus einem Befehls- oder Steuerwerk, von dem sie über das Speicherwerk in den eigentlichen Rechenapparat geleitet werden; von dort gelangen sie schließlich über den Speicher zur Ausgabe.



Zum Einführen von Zahlen in das Eingabewerk dienen mechanische oder lichtelektrische Lochkarten, Lochstreifen und Magnetbänder.

Im Befehlswerk muß zunächst die Reihenfolge der Rechenoperationen festgestellt werden, dann die erforderlichen Rechensymbole (+, —, ·, :) und schließlich der Code, nach dem das Programm in die Maschinensprache verschlüsselt wird. Entweder werden die Dezimalzahlen ins binäre (duale) System umgesetzt oder dezimal ziffernweise nach einem günstigen Code verschlüsselt. Die Dezimalzahl 1302 ist binär gleich 10100010110 und besteht aus 11 Ziffern. Wenn man aber ihre einzelnen Dezimalziffern binär verschlüsselt, so ist die erste Ziffer 1 = 1, die zweite 3 = 11, die letzte 2 = 10 und man erhält dann als dezimalbinäre Zahl 111010, die nur 6 Ziffern enthält, also eine Einsparung (Redundanz) von vier bits (Binärziffern).

Der Speicher

Die Befehle aus dem Steuerwerk gehen meist nicht direkt in das Rechenwerk, sondern über einen oder mehrere Speicher. Einige tausend Zahlen können dort gespeichert werden, von denen jede aus etwa 100 000 Dualziffern bis zu 10 Milliarden bits besteht. Wir können das Speicherwerk etwa mit dem Gedächtnis des menschlichen Gehirns vergleichen.

Hier wie dort gibt es Kurzzeit- und Langzeit-Speicher. Durch die Einführung des gespeicherten Programms von J. v. Neumann ist man nicht mehr an die Einhaltung des ursprünglichen Programms gebunden, sondern kann einen Teil speichern und den Rest des Befehls durch einen anderen ersetzen. Die amerikanische Atombehörde verfügt seit 1967 über ein Photo-Digital-Speichersystem, in dem über eine Billion bits mit Hilfe einer Kathodenstrahlröhre auf Filmen aufgespeichert werden. Jede Information kann jederzeit geholt werden.

Im *Rechenwerk* werden die programmierten Rechenoperationen vorgenommen. Das Ergebnis geht dann über das Speicherwerk in die Ausgabe. Die nach dem gegebenen Code verschlüsselten Zahlen werden jetzt in Dezimalzahlen entschlüsselt. Der Bediener der Maschine gibt Dezimalzahlen hinein und erhält Dezimalzahlen auf Lochstreifen heraus, merkt also eigentlich nichts vom verwendeten Code, besonders wenn die Maschine ihre Ergebnisse auf einem Datendrucker liefert.

Im Einverständnis des Direktors des hiesigen Polytechnikums, Herrn Direktor Merkle, führte mir liebenswürdigerweise vor kurzem Herr Baurat Falter die dortige Rechenanlage vor, die nach dem Algolsystem bedient wird. Es ist wirklich staunenswert, was eine solche Einrichtung leistet. Anlagen für allgemeine Datenverarbeitung nennt man wohl auch Computer (lat. computare = rechnen).

c) Kybernetik

Mit der programmierten Rechenmaschine haben wir ein Gebiet betreten, das erst in den letzten Jahrzehnten erschlossen wurde, in stürmischer Entwicklung fast alle Wissenszweige des täglichen Lebens erfaßte und sicher noch viele unbekannte Vorgänge enträtseln wird. Es ist die Wissenschaft der Kybernetik. Das Wort selbst stammt von dem französischen Literaturhistoriker Jean Jacques Ampère, dem Sohn des berühmten Naturforschers André Marie Ampère, nach dem die Einheit der elektrischen Stromstärke benannt ist. Dieser J. J. Ampère nannte im Jahre 1834 in seinem «Essai sur la philosophie des sciences» jene Wissenschaft «cybernétique», die der Regierung alle möglichen Verfahren zur Ansteuerung eines politischen Zieles zeigen sollte. Ampère dachte freilich nicht an eine weitere Entwicklung dieses Begriffes.

Schon die griechischen Philosophen hatten vor mehr als zweitausend Jahren darauf hingewiesen, daß im menschlichen Denken gewisse formale Beziehungen nachweisbar seien; besonders Aristoteles (384—347 vor Christus) entwickelte die logischen Denkformen zu einer formalen Logik, die Leibniz im 17. Jahrhundert mit den Gesetzen der Mathematik zu vereinen suchte.

Heute ist Kybernetik die Wissenschaft der Regelung auf allen Gebieten. In Deutschland wies als erster der Münchner Physiologe *R. Wagner* auf die Wichtigkeit hin, die mathematischen Methoden der Regeltechniker zu übernehmen.

Der Ingenieur *Hermann Schmidt* zeigte in einem Vortrag (1940) die technische Aufgabe der Kybernetik und ihre wirtschaftlichen, sozialpolitischen und kulturpolitischen Auswirkungen. Schmidt erhielt im Jahre 1944 den neugeschaffenen Lehrstuhl für Regelungstechnik an der Technischen Universität Berlin. Einen wichtigen Beitrag zur Klärung des Begriffs dieser neuen Wissenschaft lieferte der amerikanische Mathematiker *Norbert Wiener* im Jahre 1948 mit seinem Buch „Kybernetik, Regelung und Nachrichtenübertragung im Lebewesen und in der Maschine". Die deutsche Übersetzung kam erst 1963. Lange vorher schon hatte *Claude Shannon* in seiner Doktorarbeit (1938) auf die Verbindung von

Hier wie dort gibt es Kurzzeit- und Langzeit-Speicher. Durch die Einführung des gespeicherten Programms von J. v. Neumann ist man nicht mehr an die Einhaltung des ursprünglichen Programms gebunden, sondern kann einen Teil speichern und den Rest des Befehls durch einen anderen ersetzen. Die amerikanische Atombehörde verfügt seit 1967 über ein Photo-Digital-Speichersystem, in dem über eine Billion bits mit Hilfe einer Kathodenstrahlröhre auf Filmen aufgespeichert werden. Jede Information kann jederzeit geholt werden.

Im *Rechenwerk* werden die programmierten Rechenoperationen vorgenommen. Das Ergebnis geht dann über das Speicherwerk in die Ausgabe. Die nach dem gegebenen Code verschlüsselten Zahlen werden jetzt in Dezimalzahlen entschlüsselt. Der Bediener der Maschine gibt Dezimalzahlen hinein und erhält Dezimalzahlen auf Lochstreifen heraus, merkt also eigentlich nichts vom verwendeten Code, besonders wenn die Maschine ihre Ergebnisse auf einem Datendrucker liefert.

Im Einverständnis des Direktors des hiesigen Polytechnikums, Herrn Direktor Merkle, führte mir liebenswürdigerweise vor kurzem Herr Baurat Falter die dortige Rechenanlage vor, die nach dem Algolsystem bedient wird. Es ist wirklich staunenswert, was eine solche Einrichtung leistet. Anlagen für allgemeine Datenverarbeitung nennt man wohl auch Computer (lat. computare = rechnen).

c) Kybernetik

Mit der programmierten Rechenmaschine haben wir ein Gebiet betreten, das erst in den letzten Jahrzehnten erschlossen wurde, in stürmischer Entwicklung fast alle Wissenszweige des täglichen Lebens erfaßte und sicher noch viele unbekannte Vorgänge enträtseln wird. Es ist die Wissenschaft der Kybernetik. Das Wort selbst stammt von dem französischen Literaturhistoriker Jean Jacques Ampère, dem Sohn des berühmten Naturforschers André Marie Ampère, nach dem die Einheit der elektrischen Stromstärke benannt ist. Dieser J. J. Ampère nannte im Jahre 1834 in seinem «Essai sur la philosophie des sciences» jene Wissenschaft «cybernétique», die der Regierung alle möglichen Verfahren zur Ansteuerung eines politischen Zieles zeigen sollte. Ampère dachte freilich nicht an eine weitere Entwicklung dieses Begriffes.

Schon die griechischen Philosophen hatten vor mehr als zweitausend Jahren darauf hingewiesen, daß im menschlichen Denken gewisse formale Beziehungen nachweisbar seien; besonders Aristoteles (384—347 vor Christus) entwickelte die logischen Denkformen zu einer formalen Logik, die Leibniz im 17. Jahrhundert mit den Gesetzen der Mathematik zu vereinen suchte.

Heute ist Kybernetik die Wissenschaft der Regelung auf allen Gebieten. In Deutschland wies als erster der Münchner Physiologe *R. Wagner* auf die Wichtigkeit hin, die mathematischen Methoden der Regeltechniker zu übernehmen.

Der Ingenieur *Hermann Schmidt* zeigte in einem Vortrag (1940) die technische Aufgabe der Kybernetik und ihre wirtschaftlichen, sozialpolitischen und kulturpolitischen Auswirkungen. Schmidt erhielt im Jahre 1944 den neugeschaffenen Lehrstuhl für Regelungstechnik an der Technischen Universität Berlin. Einen wichtigen Beitrag zur Klärung des Begriffs dieser neuen Wissenschaft lieferte der amerikanische Mathematiker *Norbert Wiener* im Jahre 1948 mit seinem Buch „Kybernetik, Regelung und Nachrichtenübertragung im Lebewesen und in der Maschine". Die deutsche Übersetzung kam erst 1963. Lange vorher schon hatte *Claude Shannon* in seiner Doktorarbeit (1938) auf die Verbindung von

Theorie und Logik sowie auf die Möglichkeit hingewiesen, das logische Denken als ein „Schaltwerk der Gedanken“ darzustellen; er brachte 1948 die mathematische Theorie der Information und anschließend eine Theorie der Nachrichtenverschlüsselung (Codierung).

Um den Begriff Kybernetik als Regeltechnik zu erläutern, bringt *Helmar Frank* (Waiblingen), der als Direktor des Instituts für Kybernetik an der Pädagogischen Hochschule in Berlin wirkt, in einer Abhandlung „Was ist Kybernetik?“ ein sehr anschauliches Beispiel: Ein Kapitän will sein Schiff aus einem Hafen in die freie See bringen. Er bedient sich dazu eines Lotsen. Und nun beginnt die kybernetische Regelung: Der Kapitän bestimmt das Ziel (Soll) und gibt dem Lotsen eine Anweisung (Befehl als Information).

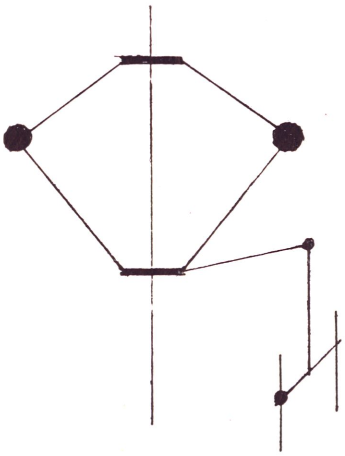
Dieser speichert den Sollwert in seinem Gedächtnis und ermittelt den jetzigen Zustand (Istwert) durch „Signale“, d. h. durch Angaben physikalischer Meßapparate, die als Träger von „Zeichen“ Fahrtrichtung, Temperatur, Wasserstand, Drehzahl der Antriebsmaschine usw. künden. Er faßt die Zeichen zu „Nachrichten“ zusammen, vergleicht Soll- und Istwert und entwirft dementsprechend ein Programm für die Fahrt, das er dem Steuermann zuleitet. Dieser empfängt die Nachrichten vom Lotsen und gibt diese Information an das Antriebswerk, das die physikalische Arbeit leistet.

Dabei ist festzustellen: Eine Information wird durch Nachrichten übermittelt und Nachrichten durch Signale, die Zeichen liefern. Eine Nachricht wird aber nur dann zur Information, wenn sie beim Empfänger ein Nichtwissen beseitigt. Die einfachste Nachricht beruht auf der Wahl zwischen zwei Zeichen, z. B. zwischen 0 und 1; sie wird daher als Einheit der Information gewählt und 1 bit (binar digit, Binärziffer) genannt. Wenn Robert Lembke im Bayerischen Rundfunk das heitere Berufsraten „Was bin ich?“ bringt und einen berühmten Star auftreten läßt, dessen Namen die Ratenden mit verbundenen Augen herausbringen sollen, so wird nur die Antwort „Ja“ oder „Nein“ gegeben. Jede solche Information wiegt 1 bit. Wenn also nach sieben Fragen der Star erraten wurde, so war die Gesamtinformation 7 bit.

Wir können schließlich sagen: Aufgabe der Kybernetik ist es, *alle Vorgänge* in Natur und Technik so zu beschreiben, daß von ihnen jeweils ein Blockschema (vgl. S. 31) entworfen und durch *technische Modelle* (Regelsysteme) dargestellt werden kann; dabei sind geistige und psychische Vorgänge miteingeschlossen. Bei allen Regelsystemen, die wir nun betrachten wollen, wird durch die Möglichkeit der Rückkopplung ein Regelkreis geschlossen.

A) Technische Regelsysteme

a) Der Zentrifugalregulator



Von unserer Schulzeit her kennen wir das Regelsystem des Zentrifugalregulators an der Dampfmaschine, den James Watt um 1780 einführte. Wenn der Dampfdruck wächst, drehen sich die Kugeln des Ventilators schneller um die Achse des Ventilators; durch die wachsende Zentrifugalkraft werden sie nach oben gehoben und regeln durch die Drosselklappe den Dampfdruck. Durch Rückkopplung wird die Geschwindigkeit des Regulators geändert.

b) Der Thermostat

Um die Temperatur eines Zimmers konstant zu erhalten, bedienen wir uns eines Thermostaten. Dieser ist ein Thermometer, das auf eine bestimmte Temperatur eingestellt werden kann. Erreicht die Quecksilbersäule die bestimmte Kontaktstelle, den Sollwert, wird ein elektrischer Stromkreis geschlossen und dadurch ein elektrisches Relais betätigt, das die Heizung abstellt. Die Zimmertemperatur sinkt nicht sofort, sondern steigt zunächst noch etwas weiter, bis sich das Zimmer abgekühlt hat. Dann sinkt die Quecksilbersäule bis zum Sollwert herab und nun beginnt das Spiel von neuem. Die Temperatur schwankt also um den Sollwert herum.

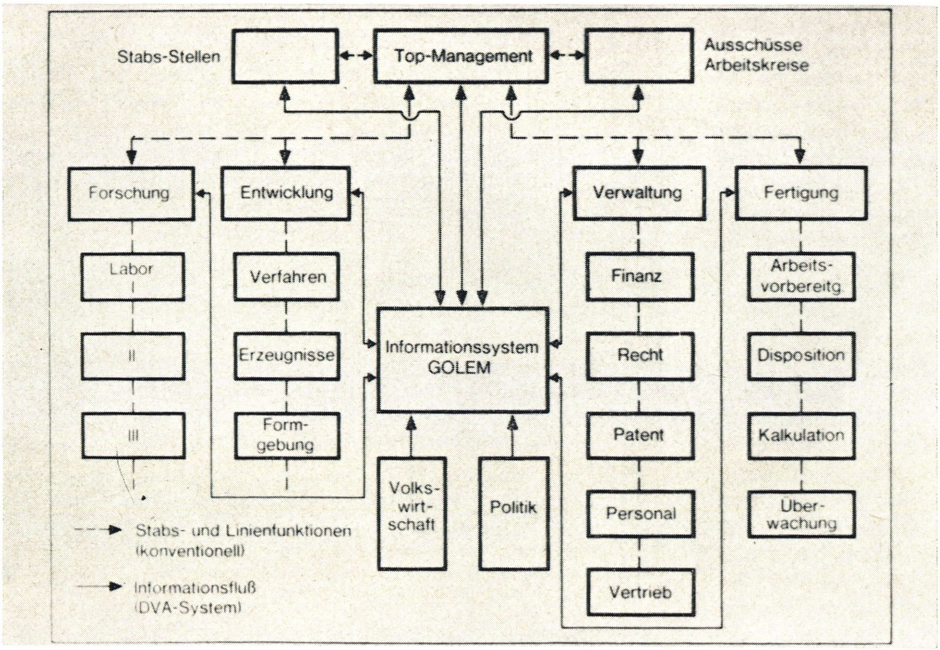
c) Eine andere technische Regelung ist beim Rundfunk- und Fernsehgerät möglich. Durch Drehen eines Knopfes wird die Lautstärke bzw. Lichtstärke geregelt.

d) Auch die Bahn von Flugkörpern und der Betrieb von Atomreaktoren werden durch Regelvorgänge beeinflußt.

e) Tausende von Wetterstationen melden ihre Beobachtungen an eine Wetterzentrale, wo sie möglichst rasch verarbeitet werden. Die resultierenden Wetterkarten werden vielfach von Zeichenautomaten gefertigt, die von Rechenautomaten gesteuert werden.

f) Auch der Betrieb von Großversandhäusern ist heute ohne elektronische Regelung kaum mehr denkbar.

g) Wertvolle Archivarien brauchen nicht mehr endgültig ad acta gelegt werden. Ein Computer sammelt alle Informationen in seinem Speicher und gibt sie jederzeit auf Anforderung heraus. So hat kürzlich die Firma Siemens unter dem Namen „Golem" (*G*roß-speicher-*o*rientierte, *l*istenorganisierte *E*rmittlungs*me*thode) ein neues Informationssystem entwickelt, das es ermöglicht, jederzeit jede gespeicherte Information in Sekundenschnelle zu gewinnen.



h) Mit Hilfe von Laserstrahlen soll es neuerdings geglückt sein, Millionen von Informationen in einem Speicher von der Größe einer Zigarettenschachtel aufzubewahren.

i) Die Technik der Nachrichtenverteilung bürgert sich im Postdienst immer mehr ein. Ein besonders wichtiger Zweig ist die Briefverteilung, wenn man bedenkt, daß in unserer Bundesrepublik täglich etwa dreißig Millionen Briefe befördert werden sollen. Die Briefe müssen zuerst abgeholt und in die Briefverteilung ausgeschüttet werden. Ein Blockschalt-Schema kann dies mit folgenden Schlagworten deutlich machen:
Abholung → Ausschütten → Prüfung des Formats → Ausscheiden der Untauglichen → Stempelgerecht Aufstellen → Stempeln → Gewichtsprüfung → Postleitzahl → Verteiler → Abgangspost.

k) Ein Zukunftsproblem ist die vollautomatische Steuerung von Zügen, die auf verschiedenen Gleisen nach einem bestimmten Programm geführt werden. Der ständig wachsende Autoverkehr auf den Straßen zwingt zur automatischen Steuerung. Elektronische Kontrollorgane melden die Dichte des Verkehrs an eine Zentrale, von der aus Befehle zurück an die Verkehrsampeln der Straßen geschickt werden. Auf diese Weise hofft man, die 9000 wichtigsten Kreuzungen in New York City erfassen zu können.

l) Findige Köpfe haben Mittel ersonnen, mit denen man die Menschheit in kürzester Zeit dezimieren könnte. Beängstigend wirkt der Gedanke an die Möglichkeit, daß in einem künftigen Kriege feindliche Atombomben ihr Ziel in kürzester Zeit erreichen könnten. Eine Abwehr wäre nur möglich, wenn die Feindraketen noch vor ihrem Einschlag geortet werden könnten. Die Möglichkeit bieten nur automatische Anlagen wie Radar, Computer.

B) Biologische Regelsysteme

Biologische Regelkreise finden wir bei Mensch, Tier und Pflanze. Sie bestehen aus organischen Elementen wie Muskeln, Nerven, Sekretorganen usw.

a) Ein großartiges Beispiel organischer Regelung ist der Blutkreislauf im menschlichen Körper. Man kann den Vorgang veranschaulichen durch ein Bild des Herzens mit den Blutbahnen oder auch nur durch eine schematische Zeichnung

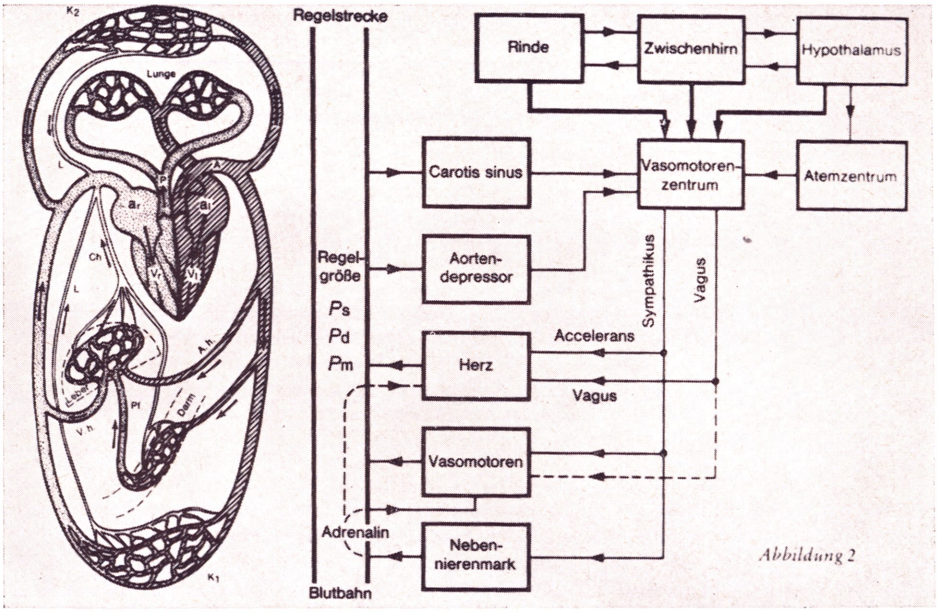


Abbildung 2

Das aus der Lunge kommende arterielle Blut fließt durch die linke Vorkammer in die linke Herzkammer, wird von dort in den Körper gepumpt, wo es mit Kohlensäure beladen wird. Das venöse Blut wird durch die rechte Vorkammer des Herzens in die rechte Herzkammer getrieben und kommt schließlich zur Reinigung in die Lunge. Der Regulator ist das Herz. Man kann es während der Herzoperation durch eine künstliche Pumpe ersetzen, ja man kann ein krankes Herz durch ein fremdes gesundes Herz ersetzen.

b) Wunderbar bleibt die Regulierung der *Körpertemperatur*. In warmer und kalter Umgebung bleibt die menschliche Temperatur unverändert bei 37° C. Abweichungen deuten auf eine Störung dieses Regelsystems. Der Vergleich mit dem technischen Thermostaten liegt nahe. Auch die Größe des Blutdruckes bleibt beim gesunden Menschen konstant. Sie wird an der Aortenwandung bestimmt und an das Zentrum der Vasomotoren-Nerven als Information geleitet. Von dort gehen Befehle an das Herz, Vasomotoren und Niebennieren. Für die Blutdruckregelung läßt sich also ein Blockschaltbild aufstellen, das nur mehr einen technischen Vorgang betont.

c) Die Regelung der Pupillenöffnung bei Änderung der Umwelt.

Das Licht trifft auf das Auge und dringt durch die Pupille bis zu den Lichtzellen der Netzhaut. Die Erregung der Zellen führt durch den Sehnerv bis über die Kreuzung (Chiasma) hinweg; hinter dieser gelangen die Meldungen über das Mittelhirn an die Muskeln der Pupille. Wenn das Licht sich verstärkt, verkleinert sich die Pupillenöffnung; eine Abschwächung des Lichts führt zu einer Vergrößerung der Pupille. Die Reaktionszeit von einem Lichtreiz bis zur Änderung der Pupille macht etwa $^1/_5$ Sekunde aus. Der ganze Vorgang läßt sich schematisch darstellen.

d) Ich sitze in meinem Lehnstuhl und denke beim Lesen gerade darüber nach, daß der Informationsgehalt eines der 25 Buchstaben unseres deutschen Alphabets nach K. Küpfmüllers Entropie der deutschen Sprache *) 1 bit beträgt. Eine Buchseite wird also rund 2000 bit Information haben; die halbe Menge brauchen wir in der Sekunde beim Sprechen. Beim Sehen können wir leicht das Hundertfache aufnehmen.

Wie ich so sinniere, bringen Schallwellen das Trommelfell meiner Ohren in Schwingungen, die, auf die Gehörknochen übertragen, auch das ovale Fenster zum Schwingen veranlassen; die Reize gelangen auf die 12 000 bis 24 000 Haarzellen der Basilarmembran, auf der die im Cortischen Organ vereinigten 100 000 Nervenfasern des Hörnerves endigen; dieser überträgt den Reiz an das Mittelhirn. Dort ist eine Erinnerung gespeichert, die ihm sagt, es habe das Telefon ein Signal gegeben. Von der Gehirnrinde wird ein Willensreiz durch das verlängerte Mark auf das Rückenmark übertragen und von dessen Nervenzellen an die Bewegungsnerven. „Ich“ werde gar nicht gefragt, „ich“ muß zum Telefon gehen, die Hand ausstrecken, das Höhrrohr abheben und meinen Namen nennen. Ich warte auf Information. Aber der Gegenspieler sagt nur: „Verzeihung, ich bin falsch verbunden.“ Ich tröste mich bei dem Gedanken, daß das menschliche (junge) Ohr Laute von 16 Hz bis 20 000 Hz wahrnimmt, während das Telefonsystem nur eine Bandbreite von 3000 Hz aufweist.

Ein Automat hätte mich vertreten können. Aber ein Gespräch wäre nur dann zustande gekommen, wenn es vorher programmiert worden wäre.

C) Psychische, medizinische und sprachliche Bemühungen

a) Für den Kybernetiker sind Tränen nichts anderes als ein automatischer Vorgang; er wird ausgelöst, wenn die seelische Spannung, der innere Druck, einen Höchststand erreicht hat; die Tränen der Trauer, des Schmerzes, der Wut bringen eine Minderung

*) Fernmeldetechnische Zeitschrift Nr. 7 (1954), S. 265—272.

des Druckes wie der Regulator an einer Dampfmaschine, dessen Kessel überheizt ist; durch Öffnen eines Ventils wird der Überdruck vermindert.

b) Die Amerikaner wollen in Zukunft große Bezirke mit Millionen von Menschen medizinisch durch einen Computer betreuen lassen; dabei soll für jeden Bewohner eine Kartei angelegt werden, in der jede Krankheit, jede ärztliche Behandlung, jede verabreichte Medizin oder Impfung in einem Riesenspeicher bewahrt wird. Bei einer neuerlichen Erkrankung eines Patienten erkundigt sich der behandelnde Arzt beim Bezirks-Computer, der ihm in Sekundenschnelle Auskunft gibt und vielleicht gleich die richtige Diagnose stellt. Der Arzt wird wissenschaftlich gebildeter Diener der Maschine sein.

c) Sprachen.

Es sind schon viele Versuche gemacht worden, durch automatisches Übersetzen eine Sprache in eine andere zu überführen. Bis jetzt sind nur klägliche Erfolge erzielt worden.

In dem lesenswerten Buch „Mathematik und Dichtung“ von Helmut Kreuzer, München 1965, werden die gesetzmäßigen Beziehungen verschiedener Schriftsteller untersucht und gegeneinander verglichen.

Besonders möchte ich auf die Arbeit von Helmut Lüdke „Der Vergleich metrischer Schemata hinsichtlich ihrer Redundanz“ hinweisen. Lüdke stellt fest, daß als Maß der metrischen Redundanz die Gleichung gilt $R = \mathrm{ld}\, x$ *). Wenn auf Grund metrischen Zwanges von zwei in Prosa gegebenen Möglichkeiten nur eine genutzt werden kann, dann ist $x = 2$ und für den Hexameter also $\mathrm{ld}\, 2 = 1$. Die Maßeinheit für metrische Redundanz ist also 1 bit. Lüdke berechnet für eine Hexameter-Verszeile eine Gesamtredundanz von 8,9 bit, für eine Silbe durchschnittlich 0,6 bit. Da nämlich in jeder Verszeile fünfmal die erste Silbe lang ist, also fünfmal die Möglichkeit aufgehoben ist, zwischen lang und kurz zu wählen, bietet eine Verszeile 5 bit Redundanz.

Nimmt man z. B. die Hexameterzeile

I*m* Hex*a*meter st*ei*gt des Spr*i*ngquells fl*ü*ssige Säule,

so ist fünfmal zwangsläufig die erste Silbe eines Versfußes lang, also fünfmal die Möglichkeit aufgehoben, zwischen lang und kurz zu wählen; dann bieten diese fünf Silben 5 bit Redundanz. Die übrigen Silben ergeben weitere 3,9 bit, im ganzen also 8,9 bit und für eine Silbe durchschnittlich 0,6 bit. Für den jambischen Senar berechnet Lüdke 3,1 bit pro Zeile, also 0,2 bit für eine Silbe.

D) Kann ein Automat lernen?

Im einfachsten Falle versteht man unter „Lernen“ die Aufnahme eines bisher unbekannten Stoffes oder Vorganges sowie die Speicherung im Gedächtnis. Das kann ein Automat auch. In höherem Sinn versteht man unter „Lernen“ eine Erfahrung, d. h. die Anwendung der gewonnenen Information. Das kann ein Automat auch, wenn ihm die gewonnene Erfahrung eingegeben wird. Man kann zum Beispiel bei einem ersten Ergebnis erkennen, daß eine Berücksichtigung gewisser Redundanzen eine Beschleunigung des Verfahrens herbeiführen kann. Aber die *Überlegung*, daß durch diese Berücksichtigung eine Einsparung möglich ist, macht nicht der Computer, sondern der Mensch. Wie denn überhaupt nicht die Maschine, sondern der Mensch jenes *Subjekt* ist, das denkt. Mathematik ist die Wissenschaft des *Möglichen*, d. h. der logischen Entwicklung gegebener Voraussetzungen. Der Computer verarbeitet in logischer Weise das mathematische Material, das ihm eingegeben wird. *Wenn* man ihm überwiegend alle Unterlagen für den endgültigen Sieg eingibt, prophezeit er gehorsam den Sieg.

*) ld = logarithmus dualis = log nach Basis 2.

E) Ausblick

Die Kybernetik wird in den nächsten Jahren alle Gebiete, geistige wie materielle, erobern. Es kommt nur darauf an, alle Gegebenheiten zu mathematisieren und zu programmieren.

Schopenhauers Spruch „Der Mensch kann *tun*, was er will, aber nicht *wollen*, was er will" ist veraltet. Karl Steinbuch, Direktor des Instituts für Nachrichtentechnik an der Universität Karlsruhe, modernisiert in seinem Buch „Falsch programmiert" (Deutsche Verlagsanstalt Stuttgart 1968) den genannten Spruch in folgende Form: „Man kann leicht *tun*, was man will, aber schwer *wollen*, was man will." Und zu diesem Wollen hilft uns der Computer mit seinem binären Zahlensystem $1 + 1 = 10$, wenn wir ihn nur richtig füttern. Freilich, den Geistesblitz, der die Idee eines Kepler, Newton, Darwin, Beethoven zündete, die Grazie eines Karajan lenkt, das kann kein Computer erzeugen.

Aber die Welt wird nicht ärmer, wenn wir dem Computer die Ausarbeitung der Details überlassen, und wenn wir dabei auf Redundanzen verzichten, wenn wir statt „Auf Wiedersehen" oder „A rivederci" nur einfach sagen „Grüß Gott" oder „Ade" oder „Servus" und dabei drei Silben Redundanz ersparen. Durch das Weglassen von Details sind wir überhaupt erst richtig imstande, das Wesentliche vom Unwesentlichen zu scheiden und der Maschine eine „sinnvolle Arbeit" zuzuteilen.

Bildnachweis

S. 15	Aus Pongratz „Naturforscher im Regensburger und ostbayerischen Raum", Regensburg 1963.
S. 16	Weigel, Wienerischer Tugendspiegel, Nürnberg 1687.
S. 23, 25, 27, 29	Aus „Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins", Siemens AG, München 1966.
S. 31	Johannes-Kepler-Polytechnikum, Regensburg.
S. 35	H. Schultze, in: „Umschau", 1968, Heft 7, S. 206.
S. 36	Dr. M. Spreng, in: „Die Kapsel", 1968, Nr. 22, S. 776.
	Alle übrigen Zeichnungen fertigte Professor Franz Ermer, Regensburg.

Literatur

Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1907.
Hankel H., Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874.
Tropfke J., Geschichte der Elementar-Mathematik, Leipzig 1903.