Acta Albertina Ratisbonensia. Bd. 29. S. 87—99. Regensburg 1969

Das paarige Vierfeldertafel-Maß K.

Kennzeichnung der gegenseitigen Beziehung zweier Merkmale durch das Wertepaar K_1, K_2

Tabelle zum Ablesen des Maßes K und zur Berechnung der Standardabweichung s_K

von K. Hellmich*

In der ätiologischen Forschung gewinnt die Biometrie, ein Anwendungsgebiet neuerer mathematischer Erkenntnisse auf alle Lebensbereiche, wachsende Bedeutung, da sie sich für die Erforschung von funktionellen Beziehungen, die noch nicht voll verstanden und vor allem nicht nach Belieben kontrollierbar sind, als ein unentbehrlicher Wissenszweig erweist. So sind insbesondere die Biologie, die Medizin, die Psychologie, die Soziologie darauf angewiesen, ihre Ergebnisse einer gezielten statistischen Auswertung zu unterwerfen. Diese Gebiete dürfen ja den Zufall als Erklärung der Beobachtungsergebnisse in keiner Weise vernachlässigen, sondern müssen vielmehr jeweils die Beurteilung in Hinblick auf den Zufall vornehmen.

Als brauchbares Forschungsmittel zum Überprüfen des Zusammenhanges zwischen zwei Alternativen bewährt sich immer mehr die sogenannte Vierfeldertafel. Beobachtet man bei betrachteten n-Merkmalsträger-Elementen einer Menge a-mal das gleichzeitige Auftreten des Merkmals U und des Merkmals E an einem Element, b-mal das Auftreten von U allein ohne E, c-mal das Auftreten von E ohne U, d-mal weder das Auftreten von U noch von E, so trägt man das Beobachtungsergebnis in folgendes Schema ein, das „Vierfeldertafel-(-tabelle)" oder auch „2x2-Tafel" heißt.

Vierfeldertafel

		Merkmal E		Summe
		ja	nein	
Merkmal U	ja	a	b	$a + b$
	nein	c	d	$c + d$
Summe		$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d = n$

Die Mathematik vermag nun aus den beobachteten Häufigkeiten die erwarteten Häufigkeiten f_E mit Hilfe der bekannten Formel $f_E = \frac{\text{Zeilensumme mal Spaltensumme}}{\text{Gesamtsumme}}$ zu berechnen, d. h. anzugeben, wie häufig die vier Möglichkeiten des Zusammentreffens sein müßten, wenn zwischen den beiden betrachteten Merkmalen kein Zusammenhang bestünde, also eine der sogenannten Nullhypothese (d. h., daß nur zufällige Kombinationen auftreten) entsprechende Verteilung vorläge. Durch Beurteilung der Abweichungen zwischen den beobachteten Häufigkeiten und den errechneten Erwartungswerten (= zu erwartenden Häufigkeiten) beantwortet sie dann die Frage, ob die Nullhypothese zu bejahen ist oder ob die Existenz eines „signifikanten" Zusammenhanges zwischen den Merkmalen angenommen werden darf. Signifikanz ist dann gegeben, wenn die berechnete Irrtumswahrscheinlichkeit P eine vereinbarte Signifikanzgrenze z. B. 0,01 nicht überschreitet.

* OSTR Dr. Kurt Hellmich, 84 Regensburg, Hornstraße 13

Die Irrtumswahrscheinlichkeit allein gibt aber leider keine Auskunft über die Stärke des Zusammenhanges. Als Maße zur gleichzeitigen Messung der Existenz und Stärke von Zusammenhängen benutzt man daher heute vorwiegend die sog. Korrelationskoeffizienten, deren weiterer Verwendungszweck darin besteht, in der Interpretation als diagnostisches Hilfsmittel verbindliche Voraussagen für das Auftreten der als korrelierend erkannten Merkmale zu ermöglichen.

Zum Verständnis der folgenden Ausführungen muß nun herausgestellt werden, daß der statistische Befund in Gestalt des Korrelationskoeffizienten seinen wissenschaftlichen mathematischen Eigenwert besitzt, seine Bedeutung für die Naturwissenschaft aber erst im Rahmen einer wohlüberlegten biometrischen Hypothese erlangt. Das ätiologische Vierfeldertafel-Verfahren unterscheidet also zwei völlig voneinander getrennte Schritte. Der 1. Schritt seitens des Mathematikers, die rein statistische Aufstellung von Korrelationen, gibt nur einen quantitativen Ausdruck für die Häufigkeit von Erscheinungen und sagt aber noch nichts aus, wie diese Häufigkeitsverteilung zustande gekommen ist. Die Hineinnahme des Kausalitätsansatzes in die Betrachtung erfolgt erst beim 2. Schritt, bei der Interpretation des Korrelationskoeffizienten durch den Sachverstand des Naturwissenschaftlers.

Die kausale Interpretation wird aber nun durch die Tatsache erschwert, daß die Korrelationskoeffizienten wegen ihrer Symmetrie bezüglich b und c invariant gegenüber einer gegenseitigen Vertauschung von b und c sind und sich daher zur Bewertung der Diagonalfelder mit den Häufigkeiten b und c leider ungeeignet erweisen. So liefern die symmetrischen Korrelationskoeffizienten z. B. r_t und Q für die beiden Vierfeldertafeln, deren Werte für b und c vertauscht sind,

		Merkmal E	
		ja	nein
Merkmal U	ja	2000	200
	nein	1	5

		Merkmal U	
		ja	nein
Merkmal E	ja	2000	1
	nein	200	5

jeweils die gleichen Werte, nämlich $r_t = \cos\left(\frac{180^\circ}{1+\sqrt{\frac{ad}{bc}}}\right) = 0{,}93$ (GUILFORD) und

$$Q = \frac{ad - bc}{ad + bc} = 0{,}96 \text{ (YULE)},$$

ohne die Möglichkeit der naheliegenden Interpretationsverschiedenheit beachten und kennzeichnen zu können, daß nämlich das Merkmal U im 1. Fall als eine stets notwendige, aber nicht immer hinreichende Ursache für E erkennbar ist, hingegen das Merkmal E im 2. Fall als eine nicht immer notwendige, aber stets hinreichende Ursache für U erscheint.

Eine derartige Schwierigkeit bei der kausalen Interpretation läßt sich von vorneherein vermeiden und beseitigen, wenn man unter Verzicht auf die Verwendung symmetrischer Korrelationsmaße bereits im 1. Schritt durch eine Vorschrift zur Aufstellung der Vierfeldertafel die Möglichkeit des Kausalitätsansatzes, die Möglichkeit zur Untersuchung auf eine einseitige bzw. wechselseitige Beziehung hin vorsorglich einbaut, indem man das vom naturwissenschaftlichen „Sachverstand" her als Ursache vermutete Merkmal links neben der Tafel anordnet, also eine Bewertung der Diagonalfelder mit den Häufigkeiten b und c durchführt und schließlich die Berechnung der Vierfeldertafel mit Hilfe eines entsprechend asymmetrischen Maßes vornimmt. Hierzu bietet sich das asymmetrische Maß

$$K = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}$$

an und wird auf Grund seiner Eignung zur genaueren Kennzeichnung der Beziehung zwischen zwei Merkmalen von mir vorgeschlagen. Dieses Maß K habe ich selbst entwickelt und als „Maß für die Abhängigkeit zweier Merkmale" in der „Praxis der Naturwissenschaften" (unter Verwendung des Buchstabens z in fünf Fortsetzungen) veröffentlicht. Für das obige Beispiel liefert dieses Maß im 1. Fall ebenfalls den Wert $K = 0{,}96$, hingegen im 2. Fall erwartungsgemäß einen recht kleinen Wert, nämlich $K = 0{,}02$. Aus beiden Werten darf auf eine einseitige kausale Beziehung zwischen dem Merkmal U als Ursache und dem Merkmal E als Effekt geschlossen werden, falls die Annahme einer Beziehung zwischen U und E naturwissenschaftlich zulässig erscheint.

Zum rechten Verständnis des Maßes K sei schon jetzt eingangs hervorgehoben und betont, daß der 1. Schritt des Mathematikers hier ebenfalls völlig getrennt vom nachfolgenden 2. Schritt des interpretierenden Naturwissenschaftlers geschieht.

Während jedoch bei der Verwendung eines symmetrischen Korrelationsmaßes die genaue Festlegung des Platzes für das Ja-Ja-Feld innerhalb der Vierfeldertafel wegen der bleibenden Symmetrie bezüglich b und c von vorneherein eine naturwissenschaftlich bedeutungslose Maßnahme darstellt, erweist sich bei der Verwendung des Maßes K die unbedingte Einhaltung der Vorschrift, daß das Ja-Ja-Feld stets den Platz links oben in der Vierfeldtafel zugewiesen erhält, als eine deutungsträchtige Forderung. Diese zunächst belanglos erscheinende mahematische Vorschrift ermöglicht nämlich im 2. Schritt des ätiologischen Verfahrens dem Naturwissenschaftler ein bisher vergeblich erstrebtes Ziel, nämlich die Kausalinterpretation, erfolgreich anzugehen.

Zu diesem vorgeschlagenen Maß K gelangt man auf folgende Weise:

Ordnet man der Vierfeldertafel V (a, b, c, d), die zur Untersuchung der Beziehung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E aufgestellt wird,

Vierfeldertafel

		Merkmal E		Summe
		ja	nein	
Merkmal U	ja	a	b	$a + b$
	nein	c	d	$c + d$
Summe		$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d = n$

den Wert $K = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} = \sin\varphi$ mit $0^\circ \leqq |\varphi| \leqq 90^\circ$ zu,

wobei der Winkel φ den durchwegs spitzen, von dem Vektor $\binom{a}{b}$ zum Vektor $\binom{c}{d}$ gemessenen Winkel darstellt und daher mit dem entsprechenden Vorzeichen zu versehen ist, so erhält man mit dieser eindeutigen Funktion $K = f(a, b, c, d)$ ein recht brauchbares Maß K zur Analyse der Vierfeldertafel V (a, b, c, d).

Zu diesem Maß K kann man auch gelangen, wenn man die Vierfeldertafel als Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems

$\left\{\begin{matrix} ax + by = a + b \\ cx + dy = c + d \end{matrix}\right\}$ auffaßt und zunächst dieses Gleichungssystem mit der

Gleichung der Geraden g_1 $\quad ax + by = a + b$

und der Gleichung der Geraden g_2 $\quad cx + dy = c + d$

mit stets positiv ganzzahligen oder nullwertigen Koeffizienten und dem Schnittpunkt $(+1; +1)$ betrachtet. Für den Schnittwinkel dieser beiden Geraden, der stets von der Geraden g_1 zur Geraden g_2 gemessen wird, erhält man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ad - bc}{ac + bd} \quad \text{und weiterhin} \sin \varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} = K,$$

wobei $-1 \leqq K \leqq +1$ und $0° \leqq |\varphi| \leqq 90°$.

Man kann also die jeweilige Beziehung zweier Merkmale auf Grund ihres Zusammenhanges, der durch die jeweils vorliegende Verteilung der Häufigkeiten a, b, c, d in der Vierfeldertafel gegeben ist, mit Hilfe der Sinusfunktion des Schnittwinkels zweier zugeordneter Vektoren oder Geraden meßbar erfassen und durch eine einzige Zahl kennzeichnen.

Die Vorzüge des Maßes K können folgendermaßen kurz charakterisiert werden. Das Maß K

1. erfordert geringe mathematische Vorkenntnisse zu seinem Verständnis,

2. erfüllt durch die Bedeutung des Winkels als Schnittwinkel der beiden zugehörigen Geraden (Vektoren) die Forderung der Anschaulichkeit (Abb. 1).

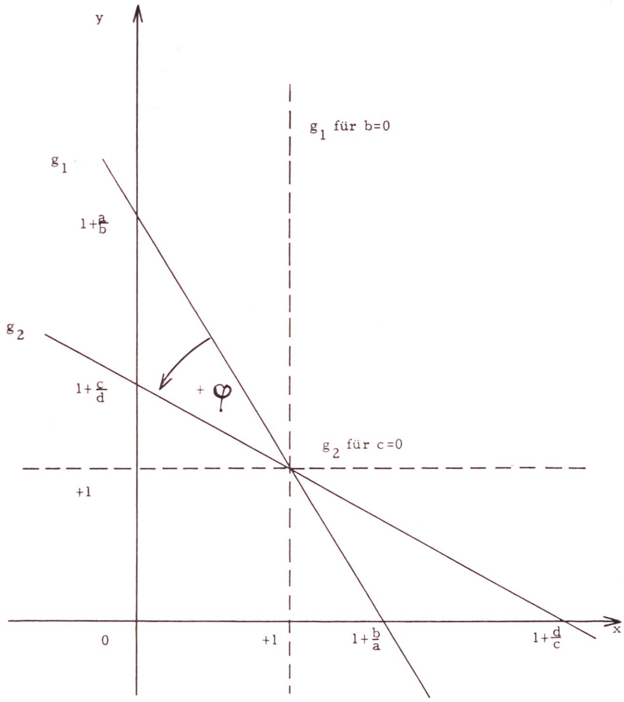

Abb. 1a: Anschauliche Deutung des Maßes K.

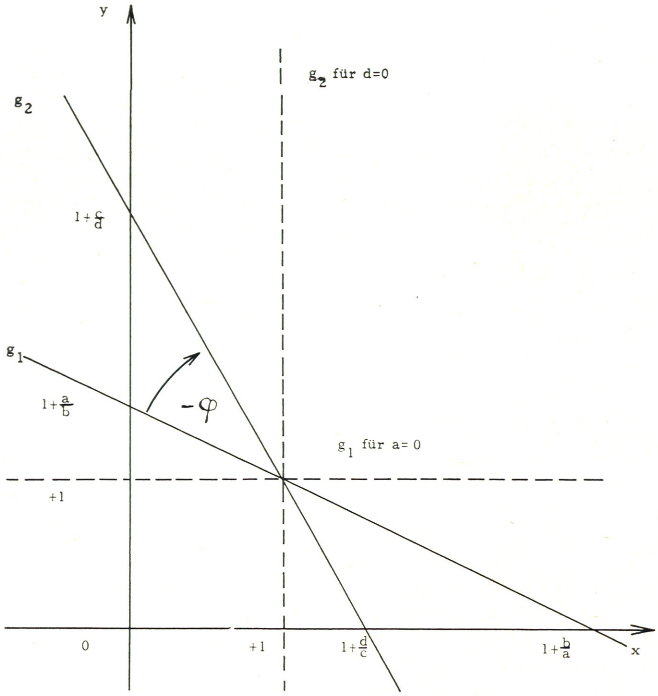

Abb. 1b: Anschauliche Deutung des Maßes K.

Der Wert K = + 1 und der Winkel φ = + 90° sind einander zugeordnet. Die beiden Geraden stehen also senkrecht aufeinander. Diese Grenzlage der Geraden mit dem Schnittwinkel + 90°, gegeben durch die Vierfeldertafel V (a, 0, 0, d), bejaht stärkstens den maximalen Zusammenhang der beiden Merkmale, ihre völlige Abhängigkeit, ihre maximale Verträglichkeit, ihre Eigenschaft des stets gleichzeitigen Auftretens oder Fehlens, d. h. das Vorkommen der beiden Merkmale als alternativ auftretendes Merkmalspaar.

Diese Eigenschaften lassen mit sinkendem K-Wert, abnehmenden Winkelwert und Verschwinden der bislang positiven Differenz ad — bc nach. Die beiden Geraden drehen sich dabei gegeneinander um ihren Schnittpunkt (+ 1; + 1). Fallen schließlich die beiden Geraden zusammen, sind also K = 0, φ = 0° und ad — bc = 0, so bedeutet diese Geradenlage, gegeben durch V (a, a, a, a) oder V (a, b, a, b) oder V (a, a, c, c) völlige Zusammenhangslosigkeit, völlige Unabhängigkeit der beiden betrachteten Merkmale.

Drehen sich nun die beiden Geraden im Gegensinn weiter um ihren Schnittpunkt, während das Maß K, der Schnittwinkel und die Differenz ad — bc negativ werden, so nehmen die Geraden letztlich beim erneuten Aufeinandersenkrechtstehen wiederum eine Grenzlage ein, bei der die Geraden gegenüber der extremen Anfangslage ihre Stellung aber vertauscht haben. Diese Grenzlage mit K = — 1 und dem Schnittwinkel φ = — 90°, gegeben durch V (0, b, c, 0), veranschaulicht die völlige Unverträglichkeit zwischen den Merkmalen, deren stets getrenntes Auftreten.

3. gestattet die differenzierte Berechnung der Vierfeldertafel V (a, b, c, d) auch für Nullwerte z. B. $b = 0$, $c = 0$. Die symmetrischen Korrelationskoeffizienten liefern für $b = 0$ oder $c = 0$ stets nur den konstanten Wert 1, und zwar ohne die Verteilung der restlichen Häufigkeiten berücksichtigen und bewerten zu können. Das vorgeschlagene Maß K hingegen vermag erstmalig auch die Vierfeldertafeln V (a, 0, c, d) und V (a, b, 0, d) unter genauer Beachtung der vorliegenden Verteilung differenziert zu berechnen.

4. erlaubt seine tabellarische und graphische Bestimmung,

5. besitzt für seine Varianz den vorteilhaften Schätzwert

$$s^2_K = (1 - K^2) \left(\frac{ab\,(a + b)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{cd\,(c + d)}{(c^2 + d^2)^2} \right) ,$$

der eine leichte und schnelle Berechnung durch tabellarisch erfaßbare Teilwerte zuläßt,

6. steht in Beziehung zu dem Assoziationsmaß Q, zu dem Phi-Koeffizienten, ferner zu χ^2 und somit zur Irrtumswahrscheinlichkeit.

7. ermöglicht eine Kausalinterpretation für die Beziehung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E, da sich mit seiner Hilfe der Grundgedanke der Regressionsbetrachtung auf die Vierfeldertafel als übertragbar erweist.

Die nachstehenden Ausführungen sollen nun die letzten vier Punkte gesondert behandeln.

Tabellarische Berechnung des Maßes K

Die Eigenschaft der tabellarischen Erfaßbarkeit des Maßes K findet man mit Hilfe der Gleichungskette

$$K = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2)}} = \frac{AD - BC}{\sqrt{(A^2 + B^2)\,(C^2 + D^2)}}$$

$$= \frac{100\,(A - C)}{\sqrt{[A^2 + (100 - A)^2]\ [C^2 + (100 - C)^2]}}$$

wenn man $a \frac{100}{a + b} = A$, $b \frac{100}{a + b} = B$, $c \frac{100}{c + d} = C$, $d \frac{100}{c + d} = D$ setzt, so daß $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$, $\frac{c}{d} = \frac{C}{D}$ und $A + B = C + D = 100$ gilt.

Ersetzt man also die Häufigkeiten a, b, c, d durch die jeweils zugehörigen Prozentzahlen A, B, C, D, bezogen auf die jeweilige waagrechte Randsumme der Vierfeldertafel, so erhält man unverändert den gleichen K-Wert. An Stelle der Vierfeldertafel V (a, b, c, d) darf man somit die Vierfeldertafel V (A, B, C, D) oder aber noch weiter vereinfacht die Vierfeldertafel V (A, 100 — A, C, 100 — C) berechnen, die nur die beiden veränderlichen Größen A und C aufweist und demnach ohne Schwierigkeiten tabellarisch berechnet werden kann.

Vierfeldertafel

		Merkmal E		Summe
		nein	nein	
Merkmal U	ja	A	$B = 100 - A$	100
	nein	C	$D = 100 - C$	100
Summe		$A + C$	$B + D = 200 - A - C$	200

Beispiele:

1. Für V (2000, 200, 1, 5) errechnet man aus $A = \frac{2000 \cdot 100}{2000 + 200}$ die Prozentzahl 91, während man aus $C = \frac{1 \cdot 100}{1 + 5}$ die Prozentzahl 17 erhält. Aus der Tabelle kann man dann für $A\% = 91\%$ und $C\% = 17\%$ den Wert $K = 0{,}955$ ablesen.
2. Für V (2000, 1, 200, 5) findet man aus $A = \frac{2000 \cdot 100}{2000 + 1}$ die Prozentzahl 100 und aus $C = \frac{200 \cdot 100}{200 + 5}$ die Prozentzahl 98.
   Aus der Ablesetabelle kann man für $A\% = 100\%$ und $C\% = 98\%$ den Wert $K = 0{,}020$ entnehmen.

Die Varianz und die Standardabweichung des Maßes K

Die Statistik erblickt ihre wichtigste Aufgabe wohl darin, von der Stichprobe beobachteter Werte auf die Grundgesamtheit zu schließen. Wenn nun das vorgeschlagene Maß K in der induktiven Statistik verwendet werden soll, muß noch seine Varianz bei Gültigkeit folgender Hypothese festgestellt werden: Die beiden Merkmale U und E sind unabhängig. Erst dann könnte von einer in der Stichprobe festgestellten Abhängigkeit auf eine Abhängigkeit in der Grundgesamtheit geschlossen werden. Zur Lösung der gestellten Aufgabe beschreitet die Statistik nun folgenden Weg. Sie gibt eine Antwort auf die konkrete Frage, bei wieviel Prozent aller Stichproben mit der Stichprobengröße von n Fällen im Wiederholungsfall ein im Einzelfall gefundener K-Wert bestätigt (reproduziert) werden wird. Der Umfangs- und Gültigkeitsbereich einer derartigen verbindlichen Voraussage läßt sich nämlich zahlenmäßig mittels der Varianz bzw. der Standardabweichung in Verbindung mit einer auswertenden Betrachtung der zugehörigen Normalkurve scharf abgrenzen. Bei einer wachsenden Anzahl von Stichproben mit einer Stichprobengröße von n Fällen darf man ja bekanntlich postulieren, daß die Häufigkeitsverteilung der K-Werte sich einer „Normalverteilung" nähert. Zwischen der Form dieser Verteilungskurve und der Standardabweichung von der Größe s besteht aber eine wichtige Beziehung, auf deren Bedeutung zur Lösung der gestellten Aufgabe hingewiesen werden muß. Die Werte $\pm$ s erweisen sich nämlich als die Abszissen der Wendepunkte der Normalverteilungskurve, wenn man dem Maximum der Häufigkeit der K-Werte, das also hier bei dem im Einzelfall gefundenen K-Wert liegt, die Abszisse Null zuordnet. Je kleiner nun die Standardabweichung s ist, desto schlanker ist daher die Kurve der Normalverteilung, desto häufiger wird man daher den gleichen K-Wert wiederfinden, desto entschiedener kann man daher die Nullhypothese zurückweisen. Schwankt nämlich die Abszisse Null des Häufigkeitsmaximums bis $\pm$ s bzw. $\pm$ 2s bzw. $\pm$ 3s bzw. $\pm$ 4s bzw. $\pm$ 5s, so hat man bereits 68,26% bzw. 95,46% bzw. 99,73% bzw. 99,994% bzw. 99,99994% der Fläche zwischen Normalkurve und Abzisse und damit die entsprechend gleiche Prozentzahl aller Stichproben von n Fällen erfaßt. Bedeutsam ist aber noch bei dieser Betrachtung, daß die Erwartungswerte für K dabei gleichzeitig zwischen den Grenzen K $\pm$ s bzw. K $\pm$ 2s bzw. K $\pm$ 3s bzw. K $\pm$ 4s bzw. K $\pm$ 5s liegen (Abb. 2). Ergibt sich demnach für eine einzelne Stichprobe mit der Stichprobengröße von $n = 406$ Fällen der Vierfeldertafel V (193,172,0,43) entsprechend der Wert $K = 0{,}75$ mit der Standardabweichung $s = 0{,}03$, so würde man bei 99,73% aller Stichproben die K-Werte zwischen $0{,}75 \pm 3 \cdot 0{,}03$ also zwischen 0,66 und 0,84 zu erwarten haben. Findet man nun bei einer solchen Stichprobe den Wert $K = 0{,}81$, so weiß man, daß dieser Wert auf Grund zufälliger Schwankungen in der Zusammensetzung der Stichprobe ausgesprochen häufig zustande kommen und sehr wohl aus der Grundgesamtheit stammen kann, in der die betrachteten Merkmale einen hohen Zusammenhang aufweisen.

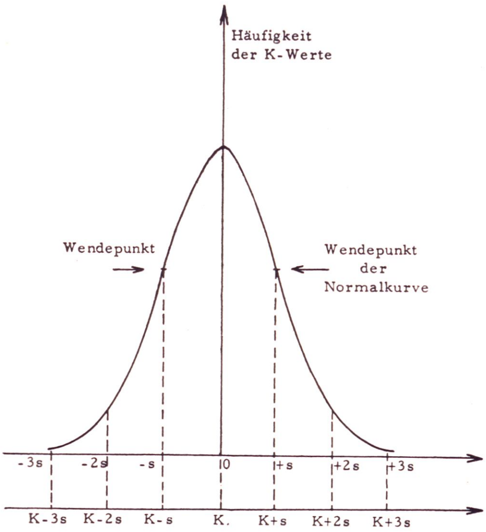

Abb. 2: Normalverteilung der K-Werte in Abhängigkeit von der Standardabweichung s

Erhält man andererseits bei einer solchen Stichprobe den Wert K = 0, so kann man aus $K : s = 0{,}75 : 0{,}03 = 25$ bzw. $K - 25s = 0$ in Verbindung mit der Normalkurve deutlich entnehmen, wie extrem selten ein solcher Fall als zufällige Stichprobenschwankung sein würde. Hat doch die Gegenwahrscheinlichkeit, daß der zu erwartende K-Wert nicht mehr im Intervall mit den Grenzen $K - 5s$ und $K + 5s$ liegen würde, bloß noch den Wert 0,0000006, d. h. bei 10 Millionen Stichproben würde man nur noch 6 K-Werte erhalten, die sich außerhalb der Grenzen von 0,60 und 0,90 befinden. Die Nullhypothese kann also in diesem Fall entschieden zurückgewiesen werden.

Berechnet man nun für das von mir vorgeschlagene Maß K die gesuchte Varianz in der Weise, wie G. U. Yule für sein Assoziationsmaß $Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}$

den Wert $s^2 = \frac{(1 - Q^2)^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$

bestimmte, so findet man den einfachen Wert

$$s^2 = (1 - K^2) \left(\frac{ab\,(a + b)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{cd\,(c + d)}{(c^2 + d^2)^2} \right)$$

Die Quadratwurzel der Varianz stellt nun die „mittlere quadratische Abweichung“ oder die „Standardabweichung“ dar. Für den Wert K erhält man somit die Standardabweichung

$$s = \sqrt{(1 - K^2) \cdot \left(\frac{ab\,(a + b)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{cd\,(c + d)}{(c^2 + d^2)^2} \right)}$$

Auf die ausführliche mathematische Herleitung der Formel für die Standardabweichung wurde hier bewußt verzichtet. Der Verfasser ist auf Anfrage gern bereit, Näheres mitzuteilen.

A%/c = 0% ALLE TABELLENWERTE IN TAUSENDSTELN

C%/c	*0%			*1%			*2%			*3%			*4%			*5%			*6%			*7%			*8%			*9%		
*/	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S
0	000	000	000	-010	000	010	-020	000	021	-031	000	033	-042	000	045	-053	000	058	-064	000	071	-075	000	086	-087	000	100	-098	000	116
1	-110	000	132	-123	000	149	-135	000	167	-148	000	185	-161	000	203	-174	000	223	-187	000	243	-201	000	263	-214	000	283	-228	000	304
2	-243	000	326	-257	000	347	-271	000	368	-286	000	390	-301	000	411	-316	000	432	-331	000	453	-347	000	472	-362	000	492	-378	000	510
3	-394	000	527	-410	000	544	-426	000	558	-442	000	572	-458	000	584	-474	000	594	-490	000	602	-506	000	608	-523	000	612	-539	000	615
4	-555	000	614	-571	000	612	-587	000	608	-602	000	601	-618	000	592	-633	000	581	-648	000	568	-663	000	554	-678	000	537	-693	000	519
5	-707	000	500	-721	000	479	-735	000	458	-748	000	435	-761	000	413	-774	000	389	-786	000	366	-798	000	342	-810	000	319	-821	000	296
6	-832	000	273	-843	000	251	-853	000	230	-862	000	210	-872	000	190	-880	000	172	-889	000	155	-897	000	139	-905	000	124	-912	000	110
7	-919	000	097	-926	000	085	-932	000	074	-938	000	065	-943	000	056	-949	000	048	-954	000	041	-958	000	035	-962	000	029	-966	000	025
8	-970	000	020	-974	000	017	-977	000	014	-980	000	011	-982	000	009	-985	000	007	-987	000	005	-989	000	004	-991	000	003	-992	000	002
9	-994	000	002	-995	000	001	-996	000	001	-997	000	000	-998	000	000	-999	000	000	-999	000	000	-1000	000	000	-1000	000	000	-1000	000	000
H	-1000	000	000																											

A%/c = 1% ALLE TABELLENWERTE IN TAUSENDSTELN

C%	*0%			*1%			*2%			*3%			*4%			*5%			*6%			*7%			*8%			*9%		
*/	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S.	K	W	S
0	010	010	000	000	010	010	-010	010	021	-021	010	033	-032	010	045	-042	010	058	-054	010	071	-065	010	086	-077	010	101	-088	010	116
1	-100	010	133	-113	010	149	-125	010	167	-138	010	185	-151	010	204	-164	010	224	-177	010	243	-191	010	264	-205	010	285	-219	010	306
2	-233	010	327	-247	010	349	-262	010	371	-277	010	392	-291	009	414	-307	009	435	-322	009	456	-337	009	476	-353	009	495	-369	009	514
3	-385	009	532	-401	009	548	-417	009	564	-433	008	578	-449	008	590	-465	008	600	-481	008	609	-498	008	615	-514	008	620	-530	007	622
4	-546	007	623	-562	007	621	-578	007	617	-594	007	610	-610	006	602	-625	006	591	-641	006	578	-656	006	564	-671	006	547	-686	005	529
5	-700	005	510	-714	005	490	-728	005	468	-741	005	445	-755	004	422	-768	004	399	-780	004	375	-792	004	351	-804	004	328	-815	003	304
6	-826	003	281	-837	003	259	-847	003	238	-857	003	217	-867	003	197	-876	002	179	-884	002	161	-893	002	144	-900	002	129	-908	002	115
7	-915	002	101	-922	002	089	-928	001	078	-934	001	068	-940	001	059	-945	001	051	-950	001	044	-955	001	037	-960	001	031	-964	001	026
8	-968	001	022	-971	001	018	-975	001	015	-978	000	012	-980	000	010	-983	000	008	-985	000	006	-987	000	005	-989	000	004	-991	000	003
9	-993	000	002	-994	000	001	-995	000	001	-996	000	001	-997	000	000	-998	000	000	-999	000	000	-999	000	000	-1000	000	000	-1000	000	000
H	-1000	000	000																											

Abb. 3: Beispiel für eine Seite der 51seitigen Ablesetabelle für K, W und S

Tabellarische Berechnung der Standardabweichung s_k:

Eine schnelle und einfache Berechnung der Standardabweichung kann man durch Umformung der Varianzgleichung

$$s^2_K = \frac{(1-K^2)\,ab\,(a+b)}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(1-K^2)\,cd\,(c+d)}{(c^2+d^2)^2}$$ auf folgendem Weg erreichen.

Wegen $a = A\frac{a+b}{100}$, $b = B\frac{a+b}{100}$, $c = C\frac{c+d}{100}$, $d = D\frac{c+d}{100}$, $A+B=C+D=100$,

$a+b = (A+B)\frac{a+b}{100}$, $a^2+b^2 = (A^2+B^2)\frac{(a+b)^2}{100^2}$, $c+d = (C+D)\frac{c+d}{100}$,

$c^2+d^2 = (C^2+D^2)\frac{(c+d)^2}{100^2}$

läßt sich folgende Gleichungskette aufstellen:

$$\frac{ab\,(a+b)}{(a^2+b^2)^2} = \frac{AB\,(A+B)}{(A^2+B^2)^2} \cdot \frac{100}{a+b} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{A\,(100-A)\cdot 100^2}{[A^2+(100-A)^2]^2}$$

Analog ergibt sich $\frac{cd\,(c+d)}{(c^2+d^2)^2} = \frac{1}{c+d} \cdot \frac{C\,(100-C)\cdot 100^2}{[C^2+(100-C)^2]^2}$

Man erhält daher die umgeformte Gleichung

$$s^2_K = \frac{W}{a+b} + \frac{S}{c+d}$$

wobei $W = \frac{(1-K^2)\cdot A\cdot(100-A)\cdot 100^2}{[A^2+(100-A)^2]^2}$ und $S = \frac{(1-K^2)\cdot C\cdot(100-C)\cdot 100^2}{[C^2+(100-C)^2]^2}$.

Da sich die Werte W und S tabellarisch erfassen und zugleich mit dem Maß K angeben lassen, ist die Aufstellung einer Tabelle zum sofortigen Ablesen nicht nur von K, sondern auch von W und S bei bloßer Kenntnis von A und C möglich und somit eine schnelle und leichte Berechnung von s_K durchführbar.

Beispiele:

1. Für V (2000,200,1,5) kann man aus der Ablesetafel wegen A% = 91% und C% = 17% (s. o) neben K = 0,955 die Werte W = 0,010 und S = 0,024 entnehmen. Daraus folgt

$$s^2_K = \frac{0{,}010}{2200} + \frac{0{,}024}{6} = 0{,}000005 + 0{,}004 \approx 40\cdot 10^{-4}, \text{ also } s_K = 6{,}32\cdot 10^{-2}$$

   oder $s_K = 0{,}06$.

2. Für V (2000,1,200,5) ergibt die Ablesung wegen A% = 100% und C% = 98% neben K = 0,020 die Werte W = 0,000 und S = 0,021. Daraus folgt

$$s^2_K = \frac{0{,}000}{2001} + \frac{0{,}021}{205} = 0 + 0{,}0001 \text{ und } s_K = 0{,}01.$$

Aus Ersparnisgründen kann leider nur eine einzige Seite der 51seitigen Tabelle, die auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage, System 360—30, ausgedruckt worden ist, als Beispiel veröffentlicht werden. Der Verfasser ist gern bereit und interessiert, jederzeit Anfragen zu beantworten und Vierfeldertafeln zu berechnen.

Möglichkeit der Kausalinterpretation einer Vierfeldertafel:

Es ist das erstrebenswerte Ziel jeder Untersuchung mit Hilfe der Vierfeldertafel, nicht nur die Signifikanz der Verknüpfung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E festzustellen, sondern darüber hinaus auch den Grad der Verknüpfung, vor allem aber die Art dieser Verknüpfung zu finden und anzugeben.

Die Art der Verknüpfung zwischen zwei Merkmalen kann nun zunächst grundsätzlich eine echte oder scheinbare einseitige Beziehung (Relation), aber auch eine echte oder scheinbare Wechselbeziehung (Korrelation) sein. Die Verknüpfung wird sich ferner im allgemeinen nicht auf eine funktionelle Beziehung allein beschränken, sondern einen kausalen Zusammenhang darstellen. So sind bei einem signifikanten Zusammenhang zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E verschiedene Kausalinterpretationen möglich.

I Das Merkmal E ist der Effekt (Wirkung) des Merkmals U als Ursache, also E = f (U).

II Das Merkmal U ist der Effekt des Merkmals E als Ursache, also U = f (E).

III Das Merkmal E wie auch das Merkmal U sind die gleichzeitigen Auswirkungen eines dritten Faktors und vermitteln daher das Trugbild einer echten gegenseitigen Beziehung.

IV Zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E besteht eine echte kausale Wechselbeziehung, also E = f (U) und U = f (E).

Die Frage, ob eine Relation oder eine Korrelation bei der Verknüpfungsart der beiden betrachteten Merkmale vorliegt, läßt sich sinnvoll nur mit einem Maß beantworten, das sowohl die asymmetrische Eigenschaft der einseitigen Beziehung (Relation) als auch die symmetrische Eigenschaft der gegenseitigen Beziehung (Korrelation) wiederzugeben vermag.

Für die formale Ursache-Effekt-Betrachtung kann man nun das Maß K wegen seiner Eigenschaft der Asymmetrie bezüglich der beiden betrachteten Merkmale erfolgreich verwenden.

Während nämlich symmetrische Maße z. B. r_t oder Q für die beiden Vierfeldertafeln V (a, b, c, d) und V (a, c, b, d) jeweils den gleichen Zahlenwert liefern, sich also invariant gegenüber der Vertauschung von b und c und dem Stellungswechsel der beiden Merkmale in der Vierfeldertafel verhalten und somit über diesen einzigen Zahlenwert hinaus von vorneherein keinerlei verbindliche Antwort auf die Frage nach der Abhängigkeit der beiden Merkmale ermöglichen und dem „Sachverstand" allein die Entscheidung überlassen, bleibt das vorgeschlagene Maß K nicht invariant. Der gegenseitige Stellungswechsel des Merkmals U mit dem Merkmal E in der Vierfeldertafel, der gleichzeitig den gegenseitigen Platzwechsel der Häufigkeit b mit der Häufigkeit c zur Folge hat, läßt sich aber als Vertauschung der Beziehung von Ursache und Effekt (Wirkung) auffassen.

Für die Ursache-Effekt-Betrachtung stehen demnach bei der Ausdeutung der Vierfeldertafel zwei K-Werte zur Verfügung, nämlich der Wert K_1 für die Deutung, daß das Merkmal U die Ursache des Merkmals E ist, und der Wert K_2 für die Deutung, daß umgekehrt das Merkmal E die Ursache des Merkmals U ist.

Die Vierfeldertafel in kausaler Betrachtung

Tafel I

		Merkmal E = Effekt: ja	Merkmal E = Effekt: nein
Merkmal U = Ursache	ja	a	b
	nein	c	d

$$K = K_1 = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}$$

Tafel II

		= Effekt Merkmal U: ja	= Effekt Merkmal U: nein
Merkmal E = Ursache	ja	a	c
	nein	b	d

$$K = K_2 = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}}$$

Es erscheint also bei dieser Kausalbetrachtung sinnvoll und zweckmäßig, der Kausalinterpretation I, $E = f(U)$, den Wert K_1 der Tafel I und der Kausalinterpretation II, $U = f(E)$, den Wert K_2 zuzuordnen.

Der Kausalinterpretation des größeren K-Wertes ist demnach im allgemeinen der Vorzug zu geben, falls eine asymmetrische Wechselbeziehung ausgeschlossen ist. Bei Gleichheit der beiden K-Werte kommen die Kausalinterpretation III und die Kausalinterpretation IV in Betracht, wenn nicht im Fall sehr kleiner c-Werte, vor allem $c = 0$, auch noch die Kausalinterpretation I herangezogen werden muß, bzw. wenn nicht im Fall kleiner b-Werte, vor allem $b = 0$, auch noch die Kausalinterpretation II zu beachten ist. Zur Vertiefung dieser Betrachtungen sei im folgenden die wichtige Kausalinterpretation I näher behandelt:

Möglichkeit des Nachweises für das alternative Auftreten des Merkmalpaares U und E, näherhin für die einseitige (eindeutige) kausale Beziehung zwischen dem Merkmal U als Ursache und dem Merkmal E als Effekt:

1. Fall:

Ist das Merkmal U die allein notwendige, aber nicht immer hinreichende Ursache des Merkmals E, so müssen wegen dieser beiden Eigenschaften der Ursache von vorneherein die Häufigkeit $c = 0$ und die Häufigkeit $b \neq 0$ sein. Zweitens muß man im extremen Fall gleichzeitig die Werte $K_1 = +1$ und $K_2 = 0$ erhalten.

Welche Beziehung müssen nun die Häufigkeiten a, b, d aufweisen, damit die zweite Bedingung für den Extremfall erfüllt ist?

Wenn von vorneherein $c = 0$, $b \neq 0$ sind, so ergibt sich

1. aus $$K_1 = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} = \frac{ad}{\sqrt{(a^2 + b^2)\, d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}}$$

der angenäherte Wert $K = +1$ für $a \gg b \neq 0$ und $d \neq 0$. (Der Wert $K_1 = +1$ für $b = 0$, $a = 0$, $d \neq 0$ entfällt hier.)

2. aus $$K_2 = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}} = \frac{ad}{\sqrt{a^2 (b^2 + d^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{d^2}}}$$

der angenäherte Wert $K_2 = 0$ für $b \gg d$ und $a \neq 0$. Der Wert $K_2 = 0$ für $d = 0$ entfällt wegen $d \neq 0$ bei K_1.)

Ergebnis: Ist das Merkmal U die allein notwendige, aber nicht immer hinreichende Ursache des Merkmals E, so muß zum Nachweis des eindeutigen kausalen Zusammenhanges $E = f(U)$ für den extremen Fall, der durch das Wertepaar $K_1 = +1$, $K_2 = 0$

angezeigt wird, die geforderte Bedingung $a \rangle\rangle b \rangle\rangle d \rangle c = 0$ extrem erfüllt sein. Als Modellbeispiel kann man die Vierfeldertafel V (2000, 200, 0, 5) mit dem Wertepaar $K_1 = 0{,}995$; $K_2 = 0{,}020$ angeben.

Besitzt das Maß K_1 für die Vierfeldertafel V (a, b, 0, d) einen erheblich kleineren Wert als $+ 1$, so darf man auch annehmen, daß unbekannte, noch zu bestimmende Störfaktoren die Ursache U an ihrer Auswirkung hindern. Zum Abschluß der Betrachtung des 1. Falls sei darauf hingewiesen, daß man den erstrebten Nachweis erheblich stichhaltiger erbringen kann, wenn man durch eine zweckdienliche Maßnahme das Merkmal U, die Ursache des Merkmals E, beseitigen und dabei das teilweise oder völlige Verschwinden des Merkmals E beobachten kann.

Ist zum Beispiel die Vierfeldertafel V (2000, 200, 0, 5) die Tafel der Ausgangssituation, die durch das Wertepaar $K_1 = 0{,}995$ und $K_2 = 0{,}020$

Tafel der Ausgangssituation

		Merkmal E ja	Merkmal E nein	Summe
Merkmal U	ja	2000	200	2200
	nein	0	5	5
	Summe	2000	205	2205

Tafel der funktionellen Einwirkung

Veränderlichkeit (= Verschwinden) von E		ja	nein	Summe
Veränderlichkeit (= Beseitigung) von U durch Maßnahme	ja	1800	180	1980
	nein	0	20	20
	Summe	1800	200	2000

Tafel der Endsituation

		Merkmal E ja	Merkmal E nein	Summe
Merkmal U	ja	20	200	220
	nein	180	1805	1985
	Summe	200	2005	2205

einen hochgradigen Zusammenhang zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E angibt und darüber hinaus das Merkmal U als notwendige, aber nicht immer hinreichende Ursache für das Merkmal E auffassen läßt, und vermag man durch eine gezielte Maßnahme in 1980 Fällen das Merkmal U völlig zu beseitigen und dabei in 1800 Fällen das völlige Verschwinden des Merkmals E zu beobachten, so erhält man die Einwirkungstafel V (1800, 180, 0, 20), deren Wertepaar $K_1 = 0{,}995$; $K_2 = 0{,}110$ den verbindlichen Nachweis für die Auflösbarkeit des Zusammenhanges zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E und für die Abhängigkeit des Merkmals E von dem Merkmal U liefert.

Durch Kombination der beiden Tafeln erhält man die Tafel der Endsituation V (20, 200, 180, 1805), die durch ihr Wertepaar $K_1 = 0{,}000$; $K_2 = 0{,}000$ die völlige Zusammenhangslosigkeit der beiden Merkmale kennzeichnet und zwar als Folge der gegen das Merkmal U gezielt geführten Maßnahme, die erfolgreich das Merkmal U beseitigte und dadurch dessen Wirkung, nämlich das Merkmal E vernichtete. Auf Grund des Gesamtergebnisses darf man die eindeutige funktionelle Beziehung $E = f(U)$ als erwiesen betrachten.

2. Fall

Ist das Merkmal U die allein notwendige, stets hinreichende Ursache des Merkmals E, so muß man zum Nachweis dieser einseitigen kausalen Beziehung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E beachten, daß sich aus den beiden geforderten Eigenschaften des Merkmals U die mathematische Forderung $c = 0$, $b = 0$ ergibt. Die vorliegende Vierfeldertafel V (a, 0, 0, d) mit dem Wertepaar $K_1 = +1$, $K_2 = +1$ läßt die Interpretation III und auch die Interpretation IV gleichzeitig zu, so daß von vorneherein die Art der Beziehung zwischen den Merkmalen nicht eindeutig erkannt und angegeben werden kann.

Der verbindliche Nachweis für den vermuteten kausalen Zusammenhang zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E läßt sich dann stichhaltig führen, wenn man durch gezieltes Einwirken nur auf das Merkmal U eine eindeutige funktionelle Beziehung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E feststellen kann.

Ist zum Beispiel die Vierfeldertafel V (551, 0, 0, 1) mit dem Wertepaar $K_1 = +1$; $K_2 = +1$ die Tafel der Ausgangssituation und vermag man durch eine gezielte Maßnahme in 550 Fällen das Merkmal U beseitigen und dabei gleichzeitig in 500 Fällen das Verschwinden des Merkmals E beobachten, dann erhält man die Einwirkungstafel V (500, 50, 0, 1) mit dem Wertepaar $K_1 = 0{,}995$; $K_2 = 0{,}020$ als Nachweis für die einseitige Beeinflußbarkeit und sodann durch Kombination beider Tafeln die Tafel der Endsituation V (1, 0, 50, 501) mit dem Wertepaar $K_1 = 0{,}995$; $K_2 = 0{,}020$. Die Einwirkung der gezielten Maßnahme auf das Merkmal U erweist sich in diesem Modellbeispiel so extrem stark, daß nicht nur die Veränderlichkeit (Beeinflußbarkeit) des Merkmals E in Abhängigkeit von der Veränderlichkeit des Merkmals U extrem eindeutig durch die Wertepaare erkannt wird, sondern auch durch die entstandene extrem hohe Häufigkeit des Nein-Nein-Feldes das Vorkommen beider Merkmale als alternativ auftretendes Merkmalspaar extrem durch die Wertepaare bejaht wird. Bei diesem Modellbeispiel ist still vorausgesetzt worden, daß sich umgekehrt das Merkmal E durch keine Maßnahme beseitigen läßt, ohne daß man dabei das Verschwinden des Merkmals U beobachten kann. Als Beispiel aus der Forschung sei die kürzlich durchgeführte statistische Begründung des einseitigen kausalen Zusammenhanges zwischen Sakroiliakalverschiebung (= SiV) und Skoliose (= Skol) bei Kindern angeführt. Die Ausgangssituation wurde durch die Krankentafel V (59, 4, 0, 85)

Krankentafel

		Merkmal Skol ja	nein	Summe
Merkmal SiV	ja	59	4	63
	nein	0	85	85
	Summe	59	89	148

Einwirkungstafel

		Veränderlichkeit (= Heilung) des Merkmals Skol durch Behebung des Merkmals SiV		
		ja	nein	Summe
Veränderlichkeit (= Heilung) des Merkmals SiV durch man. Redress.	ja	37	15	52
	nein	0	7	7
	Summe	37	22	59

Gesundungstafel

		Merkmal Skol		
		ja	nein	Summe
Merkmal SiV	ja	7	4	11
	nein	15	122	137
	Summe	22	126	148

mit dem Wertepaar $K_1 = 0{,}99$; $K_2 = 0{,}99$ gekennzeichnet. Die Behandlung der Sakroiliakalverschiebung durch manuelles Redressement zeigte sich nun in 52 Fällen erfolgreich und brachte dabei in 37 Fällen völlige Heilung der Skoliose, so daß man die Einwirkungstafel V (37, 15, 0, 7) mit dem Wertepaar $K_1 = 0{,}93$ und $K_2 = 0{,}43$ erhielt. Die sich ergebende Gesundungstafel besaß schließlich wegen V (7, 4, 15, 122) das Wertepaar $K_1 = 0{,}81$; $K_2 = 0{,}40$. Die manuelle Behandlung der Sakroiliakalverschiebung erweist sich somit als eine wirksame Heilmaßnahme, die Beziehung zwischen Sakroiliakalverschiebung und Skoliose als eine kausale Relation. Die Heilmaßnahme ist den K_1-Werten entsprechend zwar äußerst erfolgreich, aber doch nicht so stark, daß die K_2-Werte völlig verschwinden. Zur biometrischen Ausdeutung der K_2-Werte ist übrigens zu beachten, daß die Annahme, Skoliose als Ursache von Sakroiliakalverschiebung zu betrachten, naturwissenschaftlich sinnlos ist und daher unter diesem Gesichtspunkt eine biometrische Auswertung der angebotenen K_2-Werte unzulässig ist.

Abschließend kann gesagt werden, daß eine kausale Beziehung zwischen zwei Merkmalen dann als einwandfrei statistisch nachgewiesen betrachtet werden darf, wenn durch eine zweckdienliche Maßnahme die Veränderlichkeit des einen Merkmals in Abhängigkeit des anderen Merkmals statistisch festgestellt und somit eine funktionelle Beziehung aufgezeigt werden kann.

Liegt eine echte kausale Wechselbeziehung zwischen dem Merkmal U und dem Merkmal E vor, so muß man zu ihrem Nachweis nicht nur das Merkmal U, sondern auch umgekehrt davon völlig getrennt das Merkmal E durch eine jeweils geeignete Maßnahme beseitigen und dabei das Verschwinden des anderen Merkmals als jeweilige Wirkung beobachten können.

Ist trotz Beseitigung des einen Merkmals eine Beeinflußbarkeit des anderen Merkmals jeweils nicht feststellbar, so darf man bei V (a, 0, 0, d) und dem Wertepaar $K_1 = +1$, $K_2 = +1$ annehmen, daß eine nur scheinbare Wechselwirkung zwischen den beiden Merkmalen besteht.

Zum Abschluß der Ausführung erscheint folgender Hinweis wichtig und angebracht Das Urteil über die Zulässigkeit dieser vorstehenden Betrachtung fällt in den Zuständigkeitsbereich der Naturwissenschaft. Die Rechtfertigung der Biometrie für die Anwendung des Maßes K liegt in der Zukunft, d. h. in einer ständigen Wissensbereicherung durch die Feststellungen und Voraussagen, die auf Grund der statistisch gefundenen Ergebnisse gemacht werden können. Die Erfolgsträchtigkeit also entscheidet allein über die Güte des Maßes K zur Kennzeichnung der Signifikanz, Stärke und Art des Zusammenhanges zweier Merkmale. In diesem Zusammenhang muß auch die allgemeine Forderung betont werden, daß die Biometrie das Maß K nur sinnvoll verwenden darf. Sie muß daher ebenso wie die Physik auf die Verwendung mathematischer Lösungsangebote für Aufgaben, die keine naturwissenschaftliche Realität besitzen, verzichten. Die biometrische Auswertungsmöglichkeit eines berechneten K-Wertes setzt jeweils die naturwissenschaftlich zulässige Annahme eines Zusammenhanges der betrachteten Merkmale voraus.

Zur Interpretation der Wertepaare K_1, K_2

Aus $K_1 = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)}}$ und $K_2 = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + c^2)\ (b^2 + d^2)}}$

folgt $K_2 = K_1 \dfrac{\sqrt{(a^2 + b^2)\ (c^2 + d^2)}}{\sqrt{(a^2 + c^2)\ (b^2 + d^2)}}$

Die beiden Werte K_1 und K_2 besitzen also jeweils das gleiche Vorzeichen.

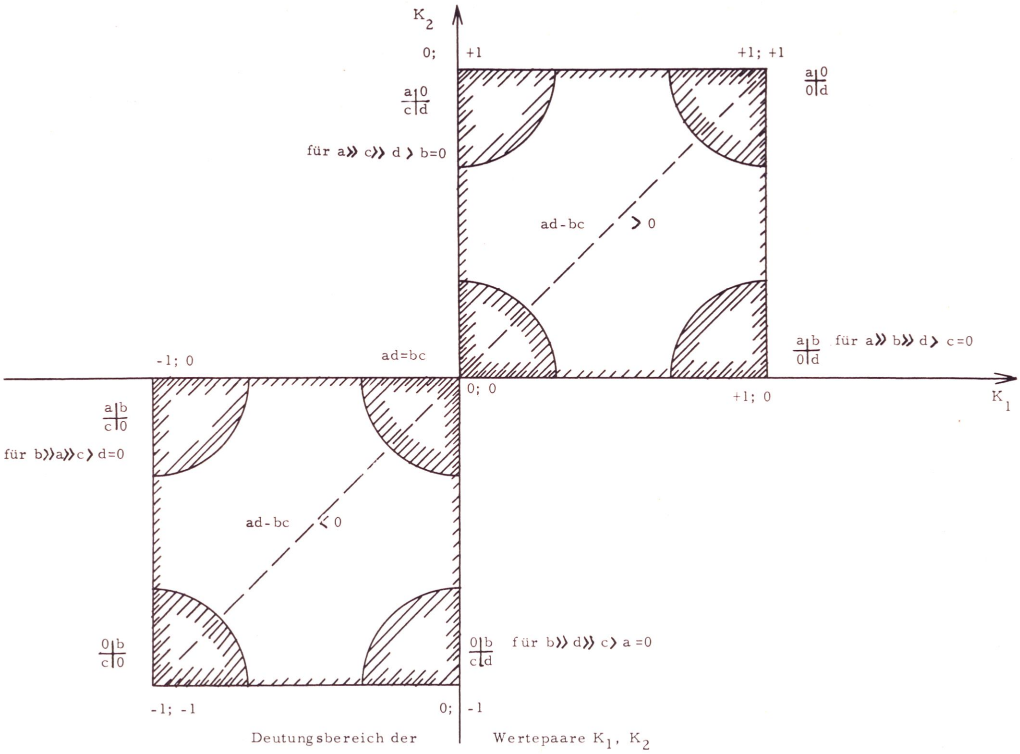

Bild 4: Deutungsbereich der Wertepaare K_1, K_2

Die Wertepaare K_1, K_2 lassen sich nun als Koordinaten von Punkten in der K_1-, K_2-Ebene deuten. Wegen der steten Übereinstimmung der Vorzeichen von K_1 und K_2 treten die Punkte (K_1; K_2) mit der Abszisse K_1 und der Ordinate K_2 nur im 1. Quadranten und im 3. Quadranten der K_1-, K_2-Ebene auf und gehören hier nur den beiden zueinander symmetrischen Quadraten mit den Eckpunkten (0; 0), (+ 1; 0), (+ 1; + 1), (0; + 1) bzw. (0; 0), (— 1; 0), (— 1; — 1), (0; — 1) an.

Für ad — bc > 0 sind beide K-Werte gleichzeitig stets positiv, für ad — bc < 0 hingegen gleichzeitig stets negativ, für ad — bc = 0 gleichzeitig gleich Null.

Deutungen wichtiger Wertepaare K_1, K_2

Welche Deutung kann das errechnete Wertepaar einer betrachteten Vierfeldertafel V (a, b, c, d) enthalten?

Da nun die möglichen Wertepaare nur den beiden symmetrischen Quadraten angehören können, erscheint es zweckmäßig festzustellen, welche Deutung das Wertepaar K_1, K_2 in den extremen Fällen, also in den Quadrateckpunkten besitzen kann, und unter welchen Bedingungen diese Eckpunkte eingenommen werden.

1. Fall: Wertepaar $K_1 = +1$, $K_2 = +1$

Dieses Wertepaar erhält man nur für b = 0 und c = 0, also für V (a, 0, 0, d), und läßt folgende Deutungen zu:

1. Die beiden Merkmale U und E bilden ein stets nur alternativ auftretendes Merkmalspaar. Entweder treten beide Merkmale nur gleichzeitig auf oder beide Merkmale fehlen gleichzeitig.
2. Zwischen beiden Merkmalen besteht eine kausale gleichstarke Wechselbeziehung, eine echte Korrelation: U ist die stets allein notwendige und zugleich stets hinreichende Ursache für E und umgekehrt!

$$U \rightleftarrows E$$

   Einerseits bewirkt U das Merkmal E, andererseits bewirkt E in gleichem Maß das Merkmal U.
3. Beide Merkmale sind gleichzeitige, gleichstarke Wirkungen eines Drittfaktors als gemeinsame Ursache.

$$D \longrightarrow \begin{smallmatrix} \nearrow U \\ \searrow E \end{smallmatrix}$$

4. U und E katalysieren gegenseitig gleichstark ihr Auftreten.
5. Hochgradiges beziehungsloses Nebeneinander (Scheinkorrelation).
6. Hochgradige gegenseitige Verträglichkeit der Merkmale.
7. Nur synchron auftretende Merkmale (Rhythmus).

2. Fall: Wertepaar $K_1 = -1$, $K_2 = -1$

Dieses Wertepaar erhält man nur für a = d = 0, als für V (0, b, c, 0); es läßt folgende Deutungen zu:

1. Nur alternierend, nicht synchron auftretende Merkmale (Rhythmus).
2. Hochgradige gegenseitige Unverträglichkeit der Merkmale.
3. Beide Merkmale sind gegenseitige, gleichstarke Kontaktgifte für ihr Auftreten.
4. Das Merkmal U bewirkt eine
   a) völlige Ausschaltung,
   b) völlige Verdrängung,
   c) völlige Vernichtung

   des Merkmals E und umgekehrt! U ist die stets allein notwendige und stets hinreichende Zerstörungsursache für E und umgekehrt.

5. Symmetrische Merkmale: Zum Beispiel Materie — Antimaterie oder Milchsäuremoleküle besitzen nur die d-Form oder nur die l-Form.
6. Ein Drittfaktor bewirkt das rhythmisch alternierende (also nicht gleichzeitig, sondern im Wechsel erfolgende) Auftreten beider Merkmale.

3. Fall: Wertepaar $K_1 = 0, \quad K_2 = 0$

Dieses Wertepaar erhält man für ad — bc = 0, also für V (a, a, a, a), V (a, b, ka, kb), V (a, ka, c, kc).

Die Deutung lautet hier: Völlige Zusammenhanglosigkeit, völliges beziehungsloses Nebeneinander der Merkmale. Beide Merkmale sind gegenseitig für Auftreten weder notwendig, noch hinreichend bzw. sind gleichmäßig verträglich und unverträglich.

Zwischenergebnis: Auf der gemeinsamen Diagonalgeraden der beiden Quadrate liegen die drei Punkte (+ 1; + 1), (0; 0), (— 1; — 1) und kennzeichnen die drei Zusammenhangsarten der beiden Merkmale: Beste Verträglichkeit, völlige Zusammenhanglosigkeit, hochgradige Unverträglichkeit.

4. Fall: Wertepaar $K_1 = +1, \quad K_2 = 0$

Vom Punkt (+ 1; + 1) mit V (a, 0, 0, d) kann man zum Punkt (+ 1; 0) gelangen, wenn die Häufigkeit b zunimmt, während unverändert c = 0 bleibt, d. h. wenn U stets notwendig für das Auftreten von E bleibt, aber nicht mehr völlig hinreichend ist. Falls $a \gg b \gg d > c = 0$ ist, gegeben z. B. durch V (2000, 200, 0, 5) erhält man angenähert die Werte $K_1 = +1$, $K_2 = 0$; ferner falls $d \gg c \gg a > b = 0$, gegeben z. B. durch V (1, 0, 50, 501).

Deutung: Es besteht ein einseitiger kausaler Zusammenhang zwischen

1. U und E. $U \rightarrow E$

   Das Merkmal U ist fast stets vorhanden, stets notwendig, aber nicht immer hinreichend für das Merkmal E. Verschwindet übrigens auch noch d, so liegt der interessante Grenzfall V (a, b, 0, 0) vor.
2. Mit dem Merkmal U tritt gleichzeitig ein Störfaktor f auf, der das Merkmal U in gewissem Maß an seiner Auswirkung hemmt, so daß U nicht immer das Merkmal E bewirken kann.

5. Fall: Wertepaar $K_1 = 0, \quad K_2 = +1$

Vom Punkt (+ 1; + 1) mit V (a, 0, 0, d) kann man andererseits zum Punkt (0; + 1) gelangen, wenn die Häufigkeit c wächst, aber b = 0 bleibt, d. h. wenn U nicht mehr stets notwendig bleibt, hingegen unverändert stets hinreichend für das Auftreten des Merkmals E ist. Falls die Bedingung $a \gg c \gg d > b = 0$ erfüllt ist, gegeben z. B. durch V (2000, 0, 200, 5), so erhält man in Annäherung die Werte $K_1 = 0$, $K_2 = +1$.

Deutung: Es besteht ein einseitiger kausaler Zusammenhang

1. zwischen U und E. $U \rightarrow E$

   Das Merkmal U ist meist vorhanden, nicht immer notwendig, aber stets hinreichend für E.
2. Neben dem leicht erkennbaren notwendigen, stets hinreichenden Merkmal U bewirkt auch eine zweite Ursache u das Merkmal E. Das Merkmal u ist aber nicht immer notwendig, aber stets hinreichend und außerdem schwer beobachtbar. Treten nun beide Ursachen gleichzeitig auf, so kann man stets gleichzeitig das Merkmal E beobachten. Fehlt hingegen U und ist u allein, so wird man entsprechend das Ausbleiben von E feststellen müssen.

6. Fall: Wertepaar $K_1 = -1$, $K_2 = 0$

Dieses Wertepaar findet man für V (a, b, c, 0), falls $b \gg a \gg c > d = 0$ erfüllt ist. So erhält man für V (200, 2000, 5, 0) in guter Annäherung die Werte $K_1 = -1$ und $K_2 = 0$.

Deutung:

1. Das fast stets vorhandene Merkmal U ist fast immer notwendig, aber wenig hinreichend für das Auftreten von E.
2. Das fast immer vorhandene Merkmal U ist die allein notwendige, meistens auch hinreichende Zerstörungsursache für das Merkmal E.

7. Fall: Wertepaar $K_1 = 0$, $K_2 = -1$.

Dieses Wertepaar erhält man in guter Annäherung für V (0, b, c, d), falls $b \gg d \gg c > a = 0$ erfüllt ist, gegeben z. B. durch V (0, 2000, 5, 200).

Deutung: Das Merkmal U ist die nicht immer allein notwendige, aber stets hinreichende Zerstörungsursache für das Merkmal E.

Für die kausale Betrachtung im 1. Quadranten kann man abschließend noch folgendes bemerken:

Bewegt sich der Punkt (K_1; K_2) waagrecht in positiver K_1-Richtung, so nimmt die Notwendigkeit des Merkmals U für das Auftreten von E zu und erreicht für $K_1 = +1$ ihr Maximum.

Steigt hingegen der Punkt (K_1; K_2) senkrecht in der positiven K_2-Richtung, so wächst die Eigenschaft des Merkmals U als hinreichende Bedingung für das Auftreten von E und erreicht ihren Höchstwert für $K_2 = +1$.

Zusammenfassend darf man also sagen, daß die sieben Eckpunkte des Deutungsbereiches durch einen Deutungsreichtum ausgezeichnet sind. Liegt demnach im Einzelfall der Punkt (K_1; K_2) in der Nähe eines Eckpunktes, so stehen dem Sachverstand gezielte Deutungsmöglichkeiten zur Auswahl bereit.

Anweisung zur Benutzung der Ablesetabelle für das Maß K

1. Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen zwei Merkmalen U und E stellt man an n Merkmalsträger fest, wie oft jeweils eine der vier Möglichkeiten des Zusammentreffens, nämlich „U und E", „U und Nicht-E", „Nicht-U und E", „Nicht-U und Nicht-E" auftritt und trägt dann die beobachteten Häufigkeiten a, b, c, d, wobei $a + b + c + d = n$ ist, in die Vierfeldertafel V (a, b, c, d) ein.

2. Man berechnet die Prozentzahlen $A = A_1 = \frac{a}{a+b} \cdot 100$ und $C = C_1 = \frac{c}{c+d} \cdot 100$, entnimmt aus der Ablesetabelle den Wert $K = K_1$, liest gleichzeitig die zugehörigen Werte für W und S ab und berechnet aus ihnen die Standardabweichung $s_K = s_1$. Dann berechnet man die Prozentzahlen $A = A_2 = \frac{a}{a+c} \cdot 100$ und $C = C_2 = \frac{b}{b+d} \cdot 100$, entnimmt aus der Ablesetabelle den Wert $K = K_2$, ferner zugleich die Werte W und S und berechnet aus ihnen die Standardabweichung $s_K = s_2$.

3. Durch die Feststellung, ob die Ungleichung $K - 3s > 0$ erfüllt ist, trifft man den Entscheid über Ablehnung oder Annahme der Nullhypothese. Liegt $K = 0$ im Intervall mit den Grenzen $K - 3s$ und $K + 3s$, so darf man die Nullhypothese nicht ablehnen, sondern

muß die beobachteten Häufigkeiten a, b, c, d als „zufällig“ ansehen. Gehört jedoch der Wert $K = 0$ dem Intervall nicht an, so darf man den „Zufall“ als Erklärung für die beobachtete Häufigkeitsverteilung zurückweisen.

4. Nach Ablehnung der Nullhypothese stellt man unter Beachtung der Vorzeichen die Lage des Punktes $(K_1; K_2)$ im entsprechenden Quadrat des Definitionsbereiches in der K_1-K_2-Ebene fest und prüft, ob eine ausgeprägte Stellungnahme als Deutung zur jeweiligen Fragestellung abgegeben werden kann.

5. Besitzt der Punkt $(K_1; K_2)$ eine aussagekräftige Lage im Deutungsquadrat, während andererseits die Nullhypothese nicht abgelehnt werden darf, so ist die betreffende Untersuchung noch nicht abzubrechen und als beendet zu betrachten. Man muß zunächst prüfen, ob man nicht durch eine Erhöhung der Anzahl n der untersuchten Merkmalsträger, d. h. durch eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs, das vermutete Ergebnis letztlich doch bestätigen kann.

1. Beispiel:

Einen interessanten Fall, der zahlenmäßig durch kleine Häufigkeiten gekennzeichnet ist, berechnete R. A. Fisher, als er die Angaben von Lange auswertete. Dessen Bericht gibt an, daß unter 13 Verbrechern, die eineiige Zwillinge waren, 10 Verbrecher Zwillingsbrüder oder -schwestern hatten, die auch Verbrecher waren, während in drei Fällen der Zwillingsbruder anscheinend kein Verbrecher war.

Unter 17 Verbrechern, die zweieiige gleichgeschlechtliche Zwillinge waren, hatten zwei Verbrecher einen verbrecherischen Zwillingsbruder oder eine verbrecherische Zwillingsschwester, während die Geschwister der anderen 15 Verbrecher nicht als rechtsbrecherisch bekannt waren.

Für die vorgegebene Vierfeldertafel

		Zwillingsbruder oder Zwillingsschwester als Rechtsbrecher verurteilt		
		ja	nein	Summe
Verbrecher ist ein	ja	10	3	13
eineiiger Zwilling	nein (zweieiig)	2	15	17
Summe		12	18	30

berechnete R. A. Fisher die Irrtumswahrscheinlichkeit $P = 0{,}00047$ und wies einen signifikanten Zusammenhang zwischen den beiden betrachteten Merkmalen nach. Die Berechnung des Maßes K ergibt nun einerseits wegen $A = A_1 = 77$ und $C = C_1 = 12$ den Wert $K = K_1 = 0{,}91$ mit $s_K = s_1 = 0{,}09$ und andererseits wegen $A = A_2 = 83$ und $C = C_2 = 17$ den Wert $K = K_2 = 0{,}92$ mit $s_K = s_2 = 0{,}08$.

Die Existenz und die Stärke des Zusammenhanges werden also jeweils hochgradig bejaht. Der Punkt $(0{,}91; 0{,}92)$ besitzt eine aussagereiche Lage im Deutungsquadrat. Eine Wechselbeziehung zwischen den beiden betrachteten Merkmalen scheidet aus sachlichen Gründen bei der Deutung aus.

Die Übereinstimmung gleichgeschlechtlicher Zwillinge in einem gleichartigen sozialen Reaktionsmerkmal, hier verbrecherische Tätigkeit, darf aber vom Sachverstand her als eine gleichzeitige, gleichstarke Wirkung eines genetischen Drittfaktors, nämlich der Eineiigkeit, aufgefaßt werden.

2. Beispiel:

Zur Vertiefung sei ein Literaturbeispiel behandelt, das sowohl auf die Notwendigkeit des Vierfelderverfahrens hinweist als auch die Deutungskraft des Maßes K zeigt. In vielen Fällen, so schreibt P. H. Hofstätter, läßt sich das Vierfelderverfahren natürlich auch gar nicht vermeiden, dann nämlich, wenn die Variablen von vornherein nur in Alternativform gegeben sind. Zur Illustration diene eine textlich passend geänderte Tafel mit dem von Glueck gesammelten Material.

		Kriminelles Verhalten der Kinder		Summe
		ja	nein	
Schlechtes Verhältnis	ja	154 (114)	74 (114)	228
zwischen den Eltern	nein	340 (380)	421 (381)	761
	Summe	494 (494)	495 (495)	989

In den Klammern stehen jeweils die erwarteten Häufigkeiten (f_E), deren Vergleich mit den beobachteten Häufigkeiten (f_B) zeigt, daß die Eltern von Kriminellen miteinander auf schlechtem Fuße leben. Die erwarteten Häufigkeiten ergeben sich dabei nach der bekannten Formel

$$f_E = \frac{\text{Zeilensumme mal Spaltensumme}}{\text{Gesamtsumme}} .$$

Als quantitativen Ausdruck für die Beziehungsstärke zwischen Kriminalität und Spannungen der Eltern bietet die Korrelationsstatistik den Wert $r_t = 0{,}36$.

„Spannungen zwischen den Eltern (‚schlechtes Verhältnis') leisten somit einen nicht unwesentlichen Beitrag zur Kriminalität der Kinder. Sie stellen wohl ein Gefährdungsmotiv dar. Diese Lesart folgt dem Schema der ‚einseitigen Steuerung'. Zu erwägen wäre natürlich auch der Fall der ‚gegenseitigen Steuerung': Spannungen zwischen den Eltern gefährden die Kinder; kriminelle Tätigkeit der Kinder bringt Spannungen zwischen den Eltern mit sich. Möglich wäre freilich auch der Fall einer ‚drittseitigen, bzw. komplexen Steuerung': Spannungen zwischen den Eltern einerseits und das kriminelle Verhalten der Kinder andererseits gehen auf einen oder mehrere gemeinsame Faktoren zurück, z. B. auf die wirtschaftliche Lage der Familie oder auch auf die Erbkonstitution eines Elternteils oder beider Eltern. Die Korrelation selbst sagt uns noch nicht, welche dieser drei Lesarten wir zu bevorzugen haben."

Die Berechnung des Maßes K für die obige Vierfeldertafel ergibt nun einerseits wegen $A = A_1 = 68$ und $C = C_1 = 45$ den Wert $K = K_1 = 0{,}431$ mit $s = s_1 = 0{,}059$, andererseits wegen $A = A_2 = 31$ und $C = C_2 = 15$ den Wert $K = K_2 = 0{,}245$ mit $s = s_2 = 0{,}041$.

Die Nullhypothese wird jeweils eindeutig zurückgewiesen, die Existenz des Zusammenhanges zwischen den betrachteten Merkmalen signifikant bejaht. Die Stärke des Zusammenhanges ist jedoch jeweils gering, so daß man für das Auftreten der Merkmale jeweils noch andere Faktoren suchen muß.

Bei der Beurteilung der Differenz $K_1 - K_2$ findet man wegen $(K_1 - K_2) : (s_1 + s_2) = 0{,}186 : 0{,}100 = 1{,}86$, daß der Fall $K_1 - K_2 = 0$ bzw. die zugehörige Berührung der Schwankungsbereiche um die beiden K-Werte bei dem 1,86fachen Betrag der jeweiligen Standardabweichung stattfindet, die Berührungsstelle also bei $K_2 + 1{,}86 \cdot s_2$ bzw. $K_1 - 1{,}86 \cdot s_1$ liegt.

Bei dem Schwankungsbetrag $\pm$ 1,86 s hat man nun 93,72% der Fläche der Normalkurve und damit die entsprechend gleiche Prozentzahl aller Stichproben mit der Stichprobengröße von n = 989 Fällen erfaßt.

Der Annahmebereich oder die sog. statistische Sicherheit, daß K_1 größer ist als K_2, beträgt demnach 93,72% + 6,28% : 2 = 96,86% und der Ablehnungsbereich oder die sog. Irrtumswahrscheinlichkeit 3,14%. Mit diesen Prozentsätzen darf man die „erste Lesart" bevorzugen. Die Berechnung des kritischen Bruches, dem Quotienten aus der Differenz der beiden K-Werte und der zugehörigen Standardabweichung s_D dieser Differenz bestätigt im verstärktem Maß die Ergebnisse dieses und auch der folgenden Beispiele. Hier ist s_D = 0,02597, also besteht 100% stat. Sicherheit für $K_1 > K_2$.

3. Beispiel:

Die Überlegenheit des Maßes K gegenüber allen bekannten klassischen Verfahren in der Datenanalyse erweist sich überzeugend bei der Auswertung von Daten, die von R. F. Winch (1951) gesammelt worden sind, um die Beziehungen zwischen Eltern und Kindern letztlich auf Symmetrie und Asymmetrie zu prüfen.

a) Die Auswertung der Antworten von 435 Kollegestudenten und 501 Kollegestudentinnen auf die Frage „How frequently (ja = never; nein = rarely, occasionally, frequently, very often) have you felt, that you were not wanted by your father resp. mother?" liefert für die Studenten die Vierfeldertafel

		Wanted by father (Gefühl vom Vater „gewollt" zu sein)		Summe
		ja	nein	
Wanted by mother (Gefühl von der Mutter „gewollt" zu sein)	ja	291	65	356
	nein	8	71	79
	Summe	299	136	435

$A_1 = 83$, $C_1 = 10$, $K_1 = 0{,}947$, $s_1 = 0{,}016$ $\quad s_D = 0{,}050$
$A_2 = 97$, $C_2 = 48$, $K_2 = 0{,}713$, $s_2 = 0{,}061$ $\quad$ kritischer Bruch 4,54
$(K_1 - K_2) : (s_1 + s_2) = 0{,}234 : 0{,}77 = 3{,}04$ $\quad$ 100% stat. Sicherheit
$\pm 3{,}04\ s \triangleq 99{,}730\%$ Fläche

mit nebenstehender Berechnung. Der Zusammenhang der beiden betrachteten Merkmale ist jeweils hochsignifikant, die Stärke des Zusammenhanges weist eine hochsignifikante Differenz auf. Das Auftreten beider Gefühle im jungen Mann verteilt sich auf Vater und Mutter nicht in gleicher Stärke, also asymmetrisch. Mit der statistischen Sicherheit von 99,860% und der Irrtumswahrscheinlichkeit von 0,14% besteht eine erhebliche Verschiebung der Gefühlsempfindungen zugunsten der Mutter.

Die Vierfeldertafel der 501 Studentinnen

		Wanted by mother		Summe
		ja	nein	
Wanted by father	ja	309	41	350
	nein	38	113	151
	Summe	347	154	501

$A_1 = 88$, $C_1 = 25$, $K_1 = 0{,}897$, $s_1 = 0{,}027$ $s_D = 0{,}018$
$A_2 = 89$, $C_2 = 27$, $K_2 = 0{,}888$, $s_2 = 0{,}029$ kritischer Bruch $= 0{,}39$
$(K_1 - K_2) : (s_1 + s_2) = 0{,}009 : 0{,}056 = 0{,}16$ nur 65% stat. Sicherheit
$\pm\ 0{,}16\ s \triangleq 12{,}72\%$ Fläche

offenbart auf Grund ihrer Berechnung ebenfalls jeweils einen hochsignifikanten Zusammenhang der beiden betrachteten Gefühlsmerkmale. Die entsprechende Erwartung der Oedipushypothese zeigt sich aber nicht erfüllt. Die Verschiebung der Gefühlsempfindungen der Studentinnen zu Gunsten des Vaters läßt sich nur mit der geringen statistischen Sicherheit von 56,36% und der großen Irrtumswahrscheinlichkeit von 43,64% feststellen.

b) Bei der Auswertung der Antworten (ja = extremely close, very much, considerable; nein = somewhat, a little, not at all) auf die Frage „Amount of attachment between you and your father resp. mother?“ kann man für die 435 Studenten folgende Vierfeldertafel aufstellen

		High to father ja	High to father nein	Summe
High to mother	ja	336	63	399
	nein	8	28	36
	Summe	344	91	435

$A_1 = 86$, $C_1 = 22$, $K_1 = 0{,}895$; $s_1 = 0{,}048$ $s_D = 0{,}063$
$A_2 = 98$, $C_2 = 69$, $K_2 = 0{,}391$; $s_2 = 0{,}078$
$(K_1 - K_2) : (s_1 + s_2) = 0{,}504 : 0{,}126 = 4{,}00$ kritischer Bruch $= 8{,}1$
$\pm\ 4\ s \triangleq 99{,}994\%$ Fläche 100% stat. Sicherheit

Die Berechnung ergibt, daß der jeweils hochsignifikante Zusammenhang der beiden betrachteten Gefühlsmerkmale eine beträchtliche hochsignifikante Differenz in der Stärke aufweist. Mit der statistischen Sicherheit von 99,997% und der Irrtumswahrscheinlichkeit von nur 0,003% darf man von der Verschiebung der Gefühlsempfindung bei den Studenten zugunsten der Mutter sprechen.

Die entsprechende Vierfeldertafel der 501 Studentinnen

		High to mother ja	High to mother nein	Summe
High to father	ja	415	9	424
	nein	62	15	77
	Summe	477	24	501

$A_1 = 98$, $C_1 = 81$, $K_1 = 0{,}208$; $s_1 = 0{,}063$ $s_D = 0{,}089$
$A_2 = 87$, $C_2 = 38$, $K_2 = 0{,}766$; $s_2 = 0{,}121$
$(K_2 - K_1) : (s_1 + s_2) = 0{,}558 : 0{,}184 = 3{,}03$ kritischer Bruch $= 6{,}07$
$\pm\ 3{,}03\ s \triangleq 99{,}730\%$ Fläche 100% stat. Sicherheit

liefert das gleiche Resultat wie bei den Studenten: Jeweils hochsignifikanter Zusammenhang der beiden betrachteten Gefühlsmerkmale, beträchtliche hochsignifikante Differenz in der Stärke des Zusammenhanges. Die statistische Sicherheit für die Verschiebung der Gefühlsempfindungen der Studentinnen und zwar ebenfalls zu Gunsten der Mutter beträgt 99,86%, die Irrtumswahrscheinlichkeit hingegen nur 0,14%.

Das Ergebnis dieser statistischen Betrachtung ist also eine hervorragende Bestätigung der von R. F. Winch formulierten These: „Irrespective of the sex of subjects, those subjects, who express a preference for one or the other parent tend to prefer the mother.“

c) Die Auswertung der Antworten (Yes = very often, frequently, occasionally; No = rarely, never) von 389 Studenten und 432 Studentinnen auf die gestellte Frage „Do you ever get ‚homesick‘ for your father resp. mother?“ ergibt für die Studenten die Vierfeldertafel

		Homesick for mother		Summe
		ja	nein	
Homesick for father	ja	208	0	208
	nein	35	146	181
	Summe	243	146	389

$A_1 = 100$, $C_1 = 19$, $K_1 = 0{,}974$; $s_1 = 0{,}010$ $s_D = 0{,}006$
$A_2 = 86$, $C_2 = 0$, $K_2 = 0{,}987$; $s_2 = 0{,}005$ kritischer Bruch $= 2{,}33$
$(K_2 - K_1) : (s_1 + s_2) = 0{,}013 : 0{,}015 = 0{,}87$ 99% stat. Sicherheit
$\pm\ 0{,}87\ s \triangleq 61{,}56\%$ Fläche

und kennzeichnet durch ihre Berechnung jeweils einen hochsignifikanten Zusammenhang der beiden Merkmale. Mit der statistischen Sicherheit 80,78% und der Irrtumswahrscheinlichkeit 19,22% ist die Verschiebung der Gefühlsempfindungen bei den Studenten zu Gunsten der Mutter feststellbar.

Die entsprechende Vierfeldertafel der 432 Studentinnen

		Homesick for mother		Summe
		ja	nein	
Homesick for father	ja	264	4	268
	nein	52	112	164
	Summe	316	116	432

$A_1 = 99$, $C_1 = 32$, $K_1 = 0{,}900$; $s_1 = 0{,}028$ $s_D = 0{,}022$
$A_2 = 84$, $C_2 = 3$, $K_2 = 0{,}976$; $s_2 = 0{,}008$ kritischer Bruch $= 3{,}6$
$(K_2 - K_1) : (s_1 + s_2) = 0{,}076 : 0{,}036 = 2{,}1$ 100% stat. Sicherheit
$\pm\ 2{,}1\ s \triangleq 96{,}42\%$ Fläche

besitzt ebenfalls einen jeweiligen hochsignifikanten Zusammenhang der beiden Gefühlsmerkmale. Für die Verschiebung der Gefühlsempfindungen der Studentinnen zu Gunsten der Mutter ergibt sich die statistische Sicherheit 98,21% und die Irrtumswahrscheinlichkeit 1,79%.

Als Ergebnis dieser statistischen Betrachtung findet man eine gute Bestätigung der von R. F. Winch formulierten These.

Bedenkt man nun rückblickend, daß die symmetrischen Korrelationsmaße nur einen einzigen Zahlenwert der Deutung zur Verfügung stellen und asymmetrische Beziehungen in keiner Weise zahlenmäßig zu erfassen vermögen, so erkennt man die Bedeutung und den Vorteil des paarigen Maßes K.

Zusammenfassung: Zum Kennzeichnen der Beziehung zweier Merkmale, deren Zusammenhang mit Hilfe einer Vierfeldertafel erfaßt worden ist, wird ein anschauliches Maß K

$$K = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} = \sin \varphi \qquad \text{angegeben.}$$

Der Winkel φ stellt den Schnittwinkel der Geraden $g_1 \equiv ax + by - a - b = 0$ mit der Geraden $g_2 \equiv cx + dy - c - d = 0$ dar.

Ist $b = c = 0$ und daher $K = +1$, $\varphi = +90°$, so stehen die Geraden senkrecht aufeinander und veranschaulichen mit ihrer Grenzlage den maximalen Zusammenhang, die völlige Abhängigkeit, während das Zusammenfallen der Geraden für $a = b = c = d$, $K = 0$, $\varphi = 0°$ die völlige Unabhängigkeit, die maximale Zusammenhangslosigkeit wiedergibt.

Ist $a = d = 0$ und daher $K = -1$, $\varphi = -90°$, so stehen die Geraden wieder senkrecht, haben aber ihre Stellung gegenüber der ersten Grenzlage vertauscht und bringen dadurch die hochgradige Unverträglichkeit der Merkmale zum Ausdruck.

Das Maß K ist asymmetrisch bezüglich b und c, liefert daher im Unterschied zu den symmetrischen Korrelationskoeffizienten für jede Stellung der Merkmale in der Vierfeldertafel einen gesonderten Wert, so daß die beiden Werte K_1 und K_2 eine Kausalinterpretation ermöglichen, da man den Stellungswechsel der Merkmale als Vertauschung von Ursache und Wirkung auffassen kann.

Das Maß K versagt nicht, falls die Häufigkeiten a, b, c, d Nullwerte aufweisen, z. B. $b = 0$, $c = 0$, $b = c = 0$, $a = d = 0$.

Wegen seiner tabellarischen Erfaßbarkeit kann man das Maß K aus einer Ablesetafel entnehmen.

Die Varianz des Maßes K

$$\text{var}(K) = (1 - K^2) \cdot \left(\frac{ab(a + b)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{cd(c + d)}{(c^2 + d^2)^2}\right)$$

kann man in den Ausdruck

$$\text{var}(K) = \frac{W}{a + b} + \frac{S}{c + d}$$ umformen. Da die Werte W und S tabellarisch erfaßbar sind, können sie zusammen mit dem Maß K gleichzeitig der Ablesetafel entnommen werden. Die Varianz des Maßes K läßt sich daher einfach und schnell bestimmen.

Summary: In order to distinguish the relationship between two characteristics, the connection of which has been marked with the help of a fourfeld table, a graphic measurement K

$$K = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \text{ is given.}$$

The angle represents the cutting angle of the straight line $g_1 \equiv ax + by - a - b = 0$ with the straight line $g_2 \equiv cx + dy - c - d = 0$.

If $b = c = 0$ and therefore $K = +1$, $\varphi = +90°$, then the straight lines are at right angle to each other and illustrate with their border-position the greatest connection, the state of complete interdependence whereas the coincidence of the straight lines for $a = b = c = d$, $K = 0$, $\varphi = 0°$, represents the complete independence, the greatest disconnection.

If $a = d = 0$ and therefore $K = -1$, $\varphi = -90°$, then the straight lines are again at right angle to each other, but they have changed their position compared with the first border-position and this way express the extrem incompatibility of the characteristics.

In measurement K is asymmetrical concerning b and c, thus it provides in contrast to the symmetrical correlation coefficients a special value for each position of the characteristics in the fourfeld table, so that two values K_1 and K_2 enable us to give an interpretation of the causes, since the change in the position of the characteristics can be conceived as an exchange of cause and effect.

The measurement K does not fail, provided the frequences a, b, c, d show zero-values, e.g. $b = 0, c = 0, b = c = 0, a = d = 0$.

Since the measurement K can be depicted in a table, one can take it from an index.

The variance of the measurement K

$$\text{var}(K) = (1 - K^2) \cdot \left(\frac{ab\,(a+b)}{(a^2+b^2)^2} + \frac{cd\,(c+d)}{(c^2+d^2)^2}\right)$$

can be transformed into the formula $\text{var}(K) = \dfrac{W}{a+b} + \dfrac{S}{c+d}$

As the values W and S can be drawn in a table, they can together with the measurement K be taken from an index. The variance of the measurement K can be easily and quickly evaluated.

Literaturverzeichnis:

Fisher, R. A.: Statisticals methods for research workes. Edinburgh, Oliver and Boyd 1954.

Guilford, J. P.: Fundamental Statistics in Psychologie and Education. McGrawhill, New York 1956.

Hellmich, K.: Ein Maß für die Abhängigkeit zweier Merkmale. — Praxis der Naturwissenschaften, Aulis-Verlag, Köln. 14. Jg., Heft 10, 1965; 15. Jg., Heft 2, 1966; 16. Jg., Heft 4, Heft 10, Heft 12, 1967.

Hofstätter, P. R.: Einführung in die quantitativen Methoden der Psychologie. Johann Ambrosius Barth, München 1953.

Kendall, M. G. — Stuart, A.: The advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 1963, Vol. 2, 1967. Charles Griffin, London.

Schönberger, M. — Hellmich, K.: Sakroiliakalverschiebung und Skoliose. Hippokrates, 1964, 35, 476—479.

Winch, R. F.: Further data and observations on the Oedipus hypothesis. American Sociological Review 16, 1951, S. 784.

Yule, G. U. — Kendall, M. G.: An Introduction to the Theory of Statistics. Charles Griffin, London 1958.

Am Schluß meiner Arbeit ist es mir eine angenehme Pflicht, den Herren Prof. Dr. W. Schmidt (Hamburg), Prof. Dr. F. Weiling (Bonn), Prof. Dr. H. Kellerer (München), Dipl.-Math. H. Weitzdörfer (München) für gute Ratschläge und bereitwillige Hilfe zu danken. Für wertvolle Anregungen bin ich auch dem Schriftleiter der „ACTA ALBERTINA", Herrn Prof. Dr. E. Preuss, zu Dank verpflichtet. Ein besonderer Dank gilt der Eisenwerk-Gesellschaft Maximilianshütte in Sulzbach-Rosenberg, hier vor allem Herrn Dipl.-Math. H. A. Fricke, für das liebenswürdige Entgegenkommen bei der Erstellung der Ablesetafel auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage (IBM-System 360—30).

Für die Ausrechnung von s_D danke ich dem Rechenzentrum des Johannes-Kepler-Polytechnikums Regensburg, insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Falter und Herrn Ing. (grad.) Gerber.

Aus Ersparnisgründen kann leider nur eine einzige Seite der 51seitigen Tabelle, die auf einer Datenverarbeitungsanlage IBM-System 360—30 ausgedruckt worden ist, als Beispiel veröffentlicht werden. Der Verfasser ist gern bereit und interessiert, jederzeit Anfragen zu beantworten und Vierfeldertafeln zu berechnen.