

ÜBER DIE INHALTSBESTIMMUNG VON NULLSTELLENGEBILDEN GLATTER
FUNKTIONEN

von
Gerhard Kißler *)

<u>I n h a l t</u>	Seite
Referat	109
Einleitung	110
1. Verallgemeinerte Residuensätze für ebene und Raumkurven	113
2. Nullstellen auf Randbereichen	117
3. Einfache Nullstellengebilde auf der Ein- heitssphäre	122
4. Über eine Anwendung des Gaußschen Satzes	125
5. Hyperflächen als Nullstellengebilde . .	127
Literatur	130

AUTORREFERAT

Die vorliegende Arbeit stützt sich im wesentlichen auf die Ergebnisse der vorangegangenen Veröffentlichung (3) "Über neue elementare Residuensätze für n-dimensionale Gebiete mit einer Anwendung auf den Hauptsatz der Theorie der impliziten Funktionen und der Theorie der nicht-linearen Optimierung." Die dort angeführten reellen Residuensätze wurden für den Fall verschwindender Funktionaldeterminante diskutiert und auf den Fall singulärer Randstellen erweitert. Im folgenden wurden Integrale der Form $\int g(x) K_{\epsilon}(f(x)) dx$ (in welchen K_{ϵ} Elemente einer δ -Schar bezeichnet) über die Einheitssphäre sowie eine Anwendung des Gaußschen Satzes auf entsprechende Integrale über beliebig geschlossene und hinreichend glatte Oberflächen behandelt.

Eingegangen am 20. Januar 1978

*) Dr. Gerhard Kißler
— D 8000 München 80, Innere Wienerstr. 46

Einleitung: Mit $[K]_{n/m}$, $0 \leq n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, bezeichnen wir allgemein diejenige Familie reell-wertiger meßbarer Funktionen von m reellen Variablen und einem positiven Parameter ε welche folgende Bedingungen erfüllt:

- (A) Jedes $K_{\varepsilon/n/m}(x) \in [K]_{n/m}$ ist für $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \geq 0$, positiv
- (B) Bezeichnet $L^n \subset \mathbb{R}^m$ einen beliebigen linearen Unterraum der Dimension n , der den Ursprung 0 enthält, so gilt:

$$\int_{L^n \subset \mathbb{R}^m} K_{\varepsilon/n/m}(x) d\omega_x = 1 \text{ für jedes } \varepsilon > 0,$$

$d\omega_x$ = n -dimensionales Volumenelement von L^n

- (C) $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} K_{\varepsilon/n/m}(x) = 0$ für $x \neq 0$.

Soweit aus der Fragestellung ersichtlich ist um welche Dimension m es sich handelt, schreiben wir statt $[K]_{n/m}$ auch $[K]_n$ bzw. statt $K_{\varepsilon/n/m}$ auch $K_{\varepsilon/n}$.

Mit $[\tilde{K}]_n$ bezeichnen wir weiter diejenige Familie reellwertiger Funktionen zu denen es stetige reellwertige Funktionen $\Phi_{\varepsilon/n}(t)$ in einer reellen Variablen und den Parametern ε und n gibt, mit den folgenden Eigenschaften:

- (A*) $[\tilde{K}]_n \ni \tilde{K}_{\varepsilon/n}(x_1, \dots, x_m) = \Phi_{\varepsilon/n}(|x|) \geq 0$ für $\varepsilon > 0$,
 $n = 1, 2, \dots$

*) Es handelt sich hier um eine erweiterte Definition des Begriffes der δ -Schar wie sie speziell für diese Arbeit benötigt wird.

(B*) Ist L^n wie vorher ein beliebiger n -dimensionaler Unterraum im R^m , so gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\int_{L^n} \Phi_{\varepsilon/n}(|x|) d\omega_x = 1$$

$d\omega_x$ = n -dimensionales Volumenelement von L^n

(C*) $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \Phi_{\varepsilon/n}(t) = 0$ für $t \neq 0$.

(D) Für $0 \leq t_1 < t_2$ ist $\Phi_{\varepsilon/n}(t_1) \geq \Phi_{\varepsilon/n}(t_2)$ für $\varepsilon \geq 0$.

Die Elemente von $[\tilde{K}]_n$ bezeichnen wir als monoton-rangnormiert.

Als Folge von A* bis D* ergibt sich der folgende Hilfsatz (ohne Beweis): Sei $H \subset R^m$ ein reguläres r -dimensionales Hyperflächenstück, mit folgender Parameterdarstellung:

$$h: = (h_1(s_1, \dots, s_r), \dots, h_m(s_1, \dots, s_r))$$

$$R^r \supset S \rightarrow h(S) = H, h \in C^1(S),$$

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial h_i}{\partial s_j} \right) = r \text{ für } s \in S, S \text{ offen, } 0 \in S$$

Dann gilt für jedes positive δ :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{|s| < \delta} \tilde{K}_{\varepsilon/r}(h(s)) \left| \frac{dh}{ds_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh}{ds_r} \right| ds_1 \dots ds_r$$

$$= 1 \text{ falls } h(0) = 0$$

$$= 0 \text{ falls } h(0) \neq 0$$

Als Residuensätze für n -dimensionale Gebiete bezeichnen wir die folgenden Ergebnisse aus [3]:

Voraussetzungen: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n und sei $y := (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$, $\Omega \rightarrow \mathbf{y}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, eine dort differenzierbare Abbildung, welche auf $\partial\Omega$ noch stetig sei. Die Menge der Nullstellen von y in Ω sei entweder leer oder bestehe nur aus isolierten, inneren Punkten.

Dann gilt:

- 1) Die Anzahl der Nullstellen von y in Ω an denen die Funktionaldeterminante $J[y(x)]$ nicht verschwindet, ist gleich dem Grenzwert

$$N = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\Omega} K_{\epsilon}(y(x)) |J[y(x)]| dx$$

- 2) Ist $N \neq 0$ und ist $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n))$, $q, n = 1, 2, \dots$, eine auf Ω integrierbare und an den Nullstellen von y stetige Funktion: $\Omega \rightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{R}^q$, so ist die Summe der Funktionswerte von f an den Nullstellen von y mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante gleich dem Grenzwert

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{\Omega} f(x) K_{\epsilon}(y(x)) |J[y(x)]| dx \in \mathbb{R}^q$$

Setzt man hierbei insbesondere für $f(x)$ die spezielle lineare Funktion x , so ergibt sich gerade die (vektorielle) Summe der Nullstellen von y in Ω mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante.

§ 1 Verallgemeinerte Residuensätze für ebene und Raumkurven

Wir beginnen mit der Behandlung einfacher Nullstellen ohne Häufungspunkte und wollen dabei auch Berührungspunkte höherer Ordnung mit einbeziehen.

Nullstellen die zugleich Randpunkte sind untersuchen wir in § 2.

Satz 1.1.: Voraussetzungen: Sei $f(x)$ eine in dem Intervall $I = [a, b] - \infty < a < b < \infty$ definierte, reelle Funktion der Klasse $C^{m+1}(I)$ mit $f(a), f(b) \neq 0, 0$; $m = 1, 2, \dots$

In I besitze f nur isolierte Nullstellen und keine Berührungspunkte von einem höheren Grad als m , d.h. für jedes $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = 0$ ist $f^{(m+1)}(x^*) \neq 0$.

Dann gilt:

- 1.) Die Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ in I ist gleich dem Grenzwert

$$N = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \sum_{v=0}^m \int_I K_{\epsilon/1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(v)}(x)) |f^{(v+1)}(x)| dx.$$

- 2.) Die Anzahl derjenigen Berührungspunkte der Ordnung μ , welche nicht zugleich $\mu+1$ -ter Ordnung sind, ist gleich dem Grenzwert

$$N_{\mu} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_I K_{\epsilon/1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f^{(\mu+1)}(x)| dx.$$

- 3.) Existieren in I Nullstellen, so ist deren Summe gleich dem Grenzwert

$$S = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \sum_{\mu=0}^m \int_I x K_{\epsilon/1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f^{(\mu+1)}(x)| dx.$$

4.) Existieren in I Berührungspunkte μ -ter Ordnung, welche nicht zugleich $\mu+1$ -ter Ordnung sind, so ist deren Summe gleich dem Grenzwert

$$S_{\mu} = \int_I x K_{\varepsilon/1}^{\mu+1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f(x)|^{\mu+1} dx.$$

Beweis: Der Fall $N = 0$ ist wegen (C) trivial. Zur Bestimmung der Anzahl derjenigen Nullstellen die zugleich Berührungspunkte μ -ter Ordnung, aber nicht $\mu+1$ -ter Ordnung sind, betrachten wir die spezielle Raumkurve

$$(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in I, \text{ und}$$

bilden den Integralausdruck

$$N_{\varepsilon} = \int_I K_{\varepsilon/1}^{\mu+1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) \sqrt{f'(x)^2 + \dots + f^{(\mu+1)}(x)^2} dx$$

Wir können nun ein $\delta > 0$ so wählen, daß für jeden Berührungspunkt x^* der Ordnung μ in I eine ganze Umgebung

$U_{\delta, x^*} = \{x \mid |x^* - x| < \delta\}$ ganz in I enthalten ist und keine weiteren Nullstellen enthält, so daß gilt:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{U_{\delta, x^*}} K_{\varepsilon/1}^{\mu+1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) \sqrt{f'(x)^2 + f''(x)^2 + \dots + f^{(\mu+1)}(x)^2} dx =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{U_{\delta, x^*}} K_{\varepsilon/1}^{\mu+1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f(x)|^{\mu+1} dx = 1$$

Summation über alle Umgebungen U_{δ, x_i^*} , $i = 1, 2, \dots$ liefert sodann sukzessive die Anzahl aller weiteren Berührungspunkte der Ordnung μ .

1.) folgt aus 2.) indem über alle $\mu=0, 1, 2, \dots$ summiert wird.

Die Aussagen 3.) und 4.) die sich von 1.) und 2.) nur darin unterscheiden, daß der Kern $K_{\epsilon/1}$ durch die spezielle Funktion x gewichtet ist, erhalten wir analog, indem wir für gewisse Umgebungen der Berührungspunkte Terme der folgenden Form betrachten:

$$\begin{aligned} x_{\epsilon}^* &= \int_{U_{\delta, x}^*} x K_{\epsilon/1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f(x)|^{(\mu+1)} dx = \\ &= \int_{U_{\delta, x}^*} f^{(\mu)-1}(f^{(\mu)}(x)) K_{\epsilon/1}(f(x), f'(x), \dots, f^{(\mu)}(x)) |f(x)|^{(\mu+1)} dx. \end{aligned}$$

Analog läßt sich auch der folgende allgemeinere Satz für Raumkurven beweisen:

Satz 1.2: Voraussetzungen: Sei $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ eine Parameterdarstellung einer $m+1$ -mal differenzierbaren Kurve, $m=0, 1, 2, \dots$, $[a, b] = J \rightarrow p(J) \subset \mathbb{R}^n$ und sei f eine stetige, reellwertige Funktion $J \rightarrow f(J)$.

Für jede Nullstelle der Parameterdarstellung

$$t^*: p(t^*) = 0 \text{ sei } p_i^{(m+1)}(t^*) \neq 0, \quad i=1, \dots, n.$$

Dann gilt: Die Summe der Funktionswerte von f an den Nullstellen von p : $\sum_{\mu} f(t_{\mu}^*)$, ist gleich dem Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{v=1}^m \int_J f(t) K_{\epsilon/1}(p(t), p'(t), \dots, p^{(v)}(t)) |p(t)|^{v+1} dt$$

$\epsilon > 0$

Die hier dargestellte Methode zur Bestimmung der Summe aller Nullstellen, für welche die höheren Ableitungen bis zu einem endlichen Wert verschwinden, läßt sich auch auf Funktionen endlich vieler Variabler ausdehnen, obschon hier die Verhältnisse wesentlich komplizierter sind. Eine grundsätzliche Schwierigkeit ergibt sich dabei aus dem Umstand, daß bislang selbst im dreidimensionalen Fall noch keine passende Klassifikation singulärer Nullstellen existiert. Die Methode nach der wir im höherdimensionalen Fall zu verfahren haben, ist jedoch an sich einfach. Ist etwa $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion, welche in einem Gebiet Ω nur isolierte Nullstellen besitzt, unter denen sich auch singuläre Punkte befinden, vorgegeben, so haben wir je nach Art der Singularität eine um die Singularitäts-Bedingungen erweiterte Funktion $\hat{f} = (f_1(x), \dots, f_n(x), S_1(x), \dots, S_\mu(x))$ zu betrachten, für welche die

$$\text{Bedingung } \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}(x) \right| \neq 0$$

erfüllt ist.

Betrachten wir also nur diejenigen Nullstellen von f , welche durch das Gleichungssystem $\hat{f}(x) = 0$ vollständig*) beschrieben werden, so ist deren Anzahl in Ω gleich dem Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} K_{\varepsilon/n}(\hat{f}(x)) \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2}(x) \dots \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}(x) \right| dx$$

*) "vollständig" bedeutet also:

$$\hat{f}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_2}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}(x) \neq 0$$

und deren Summe gleich dem Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} \chi_{K_{\varepsilon/n}}(\tilde{f}(x)) \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x) \dots \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(x) \right| dx \in \mathbb{R}^n$$

Im einfachsten Fall haben wir

$$\tilde{f} = (f_1(x), \dots, f_n(x), J[f(x)]) \text{ mit}$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x) \wedge \dots \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(x) \right| \neq 0.$$

§ 2 Nullstellen auf Randbereichen

Bei der Formulierung unserer Residuensätze haben wir stets vorausgesetzt, daß es sich bei den betrachteten Nullstellen um innere isolierte Punkte handelt. Wir wollen nun diese Einschränkung fallen lassen und auch solche Nullstellen in unsere Untersuchung mit einbeziehen, die auf Randflächen liegen, von denen wir im übrigen nur annehmen wollen, daß sie stückweise glatt seien und keine Doppelpunkte aufweisen.

Satz 2.1. Voraussetzungen: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, dessen Randmenge $\partial\Omega$ aus stückweise glatten Flächen bestehe.

$$y: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow y(\Omega) \subset \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$y(x) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) \text{ sei}$$

eine auf Ω definierte und differenzierbare Funktion, deren Nullstellengebilde nur aus isolierten Punkten bestehe. $\tilde{K}_{\varepsilon/n}$ sei ein Element aus $[\tilde{K}]_n$. N bezeichne die Anzahl der Nullstel-

len von y in Ω mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante und positivem Randabstand, M die Anzahl der Nullstellen von y mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante, welche auf glatten Randstücken liegen und S die Anzahl der Nullstellen von y mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante, welche auf singulären Randbereichen liegen.

Dann gilt:

1.)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} \tilde{K}_{\varepsilon} (y(x)) |J[y(x)]| dx = N + \frac{1}{2} M + \sum_{\tau}^P \alpha_{\tau}$$

mit P Konstanten $0 < \alpha_{\tau} < 1$

$$\tau = 1, \dots, P$$

2.) Existieren auf Ω Nullstellen mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante und ist $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n))$ $q = 1, 2, \dots$ eine auf Ω integrierbare und an den Nullstellen von y stetige Funktion, $\Omega \rightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{R}^q$, so gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int f(x) \tilde{K}_{\varepsilon/n} (y(x)) |J[y(x)]| dx = \\ = \int_{\mu}^N f(x_{\mu}^*) + \frac{1}{2} \sum_{\nu}^M f(x_{\nu}^*) + \sum_{\tau}^P \alpha_{\tau} f(x_{\tau}^*) \in \mathbb{R}^q. \end{aligned}$$

wobei die x_{μ}^* , x_{ν}^* , x_{τ}^* die entsprechenden Nullstellen von y im Innern von Ω , auf den glatten und auf den singulären Randbereichen mit jeweils nichtverschwindender Funktionaldeterminante bezeichnen.

Beweis: Wir beschränken uns auf die Aussagen über die Nullstellen auf dem Rande von Ω . Es ist klar, daß Nullstellen mit verschwindender Funktionaldeterminante außer Acht gelassen werden können, da die Integration über Umgebungen solcher Punkte im Grenzübergang wie im Fall innerer Nullstellen keinen Beitrag liefert.

1.1) Liegt eine Nullstelle x^* mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante auf einem glatten Randbereich, existiert also zu x^* eine Tangentialfläche, bzw. eine Tangente, so können wir eine δ -Umgebung von x^* derart wählen, daß - unabhängig von den übrigen Nullstellen - die folgende Transformation für alle ε aus einem endlichen Intervall $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon^* > 0$ gilt:

$$\int K_\varepsilon(y(x)) |J[y(x)]| dx = \int K_\varepsilon(u) du$$

$$\bar{\Omega} \cap U(x^*, \delta) \quad y(\bar{\Omega}) \cap y(U(x^*, \delta))$$

$$U(x^*, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x^*| < \delta\} = U^*$$

Da nun x^* Randpunkt von Ω ist, ist der Nullpunkt $0 = y(x^*)$ auch Randpunkt von $y(\Omega)$ bzw. von $y(U^*) \cap y(\bar{\Omega})$ und $\partial y(\Omega)$ besitzt dort eine eindeutig bestimmte Tangentialfläche bzw. Tangente, welche durch eine gewisse Linearform $t(x)$ beschrieben wird.

Durch $t(x)$ wird insbesondere $y(U(x^*, \delta)) \subset \mathbb{R}^n$ in zwei Teilgebiete H_δ^+ und H_δ^- zerlegt:

$$H_\delta^+ = \{u \in y(U(x^*, \delta)), t(u) > 0\}$$

$$H_\delta^- = \{u \in y(U(x^*, \delta)), t(u) < 0\}$$

(wobei wir ohne Einschränkung annehmen, daß H_δ^+ die Flächennormale der Tangentialfläche enthält, welche in das Innengebiet von $y(\Omega)$ weist.)

Für ein geeignet gewähltes $\delta > 0$ haben wir dann:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y(\bar{\Omega}) \cap y(U^*)} \tilde{K}_\epsilon(u) du = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{H_\delta^+} \tilde{K}_\epsilon(u) du = \frac{1}{2}$$

Die Konvergenz folgt im übrigen aus den Eigenschaften B^* und C^* des symmetrischen Kerns $\tilde{K}_\epsilon(x) = \Phi(|x|)$

1.2.) Für den mit der Funktion $f(x)$ gewichteten Term $f(x) \tilde{K}_\epsilon(y(x)) |J[y(x)]|$ haben wir

$$\int_{\bar{\Omega} \cap U(x^*, \delta)} f(x) \tilde{K}_\epsilon(y(x)) |J[y(x)]| dx =$$

$$\int_{\bar{\Omega} \cap U(x^*, \delta)} f(y^{-1}(y(x))) \tilde{K}_\epsilon(y(x)) |J[y(x)]| dx =$$

$$= \int_{y(\bar{\Omega}) \cap y(U^*)} f(y^{-1}(u)) \tilde{K}_\epsilon(u) du \quad \text{und haben}$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{y(\bar{\Omega}) \cap y(U^*)} f(y^{-1}(u)) \tilde{K}_\epsilon(u) du = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{H_\delta^+} f(y^{-1}(u)) \tilde{K}_\epsilon(u) du = \\ = \frac{1}{2} f(x^*)$$

Durch Integration über alle Nullstellenumgebungen erhalten wir sodann die

$$\text{Werte } \frac{1}{2} M \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \sum_v^M f(x_v^*) .$$

2.1) Ist nun x^* eine Nullstelle mit nichtverschwindender Funktionaldeterminante, welche auf einem singulären Randbereich liegt, so wählen wir im \mathbb{R}^n wieder eine Umgebung $U(x^*, \delta) = \{x \mid |x - x^*| < \delta\}$ und haben wie vorher:

$$\int_{\bar{\Omega} \cap U(x^*, \delta)} \tilde{K}_\varepsilon(y(x) | J[y(x)] |) dx = \int_{y(\bar{\Omega}) \cap \tilde{Y}(U(x^*, \delta))} K_\varepsilon(u) du \quad \begin{matrix} \rightarrow \alpha \\ \varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0 \end{matrix}$$

mit $0 \leq \alpha \leq 1$

und analog zu 1.2):

$$2.2.) \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\bar{\Omega} \cap U(x^*, \varepsilon)} f(x) K_\varepsilon(y(x) | J[y(x)] |) dx = \alpha \cdot f(x^*).$$

Integration über alle (disjunkten) Umgebungen $U(x_\tau^*, \delta)$, $\tau=1, \dots, S$ liefert sodann die Werte $\sum_{\tau=1}^S \alpha_\tau$ bzw. $\sum_{\tau=1}^S \alpha_\tau f(x_\tau^*)$.

Die Abschätzung bzw. Bestimmung der α_τ -Werte, welche wir als Formfaktoren bezeichnen, ergibt sich aus der Geometrie der einzelnen singulären Randbereiche:

Sei x_τ^* eine Nullstelle, welche auf einem singulären Randbereich liegt, der dort durch endlich viele glatte Flächenstücke F_1, \dots, F_l mit $x_\tau^* \in F_i$ für $i=1, \dots, l$ begrenzt sei. x_τ^* liege also auf einer Ecke, Kante oder Spitze des Randes von Ω .

Der Formfaktor α gibt dann direkt den räumlichen Öffnungswinkel des vom Nullpunkt $0 = y(x_\tau^*)$ ausgehenden Tangentialkegels zu $y(E)$, $E = \{x \in \Omega, \text{ und } |x - x_\tau^*| < \delta\}$. an, der in das Innengebiet von $y(\Omega)$ weist.

Korollar 2.2: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt genau dann einen überall glatten Rand, wenn für jedes $y \in C^1(\bar{\Omega})$ der Term

$$2 \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\bar{\Omega}} \tilde{K}_{\varepsilon/n}(y(x)) |J[y(x)]| dx$$

ganzahlig ist.

Korollar 2.4: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt singuläre Randstellen falls wenigstens für ein $y \in C^1(\bar{\Omega})$ eine der beiden Ungleichungen

$$0 < \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\bar{\Omega}} \tilde{K}_{\varepsilon/n}(y(x)) |J[y(x)]| dx < \frac{1}{2}$$

oder

$$\frac{1}{2} < \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\bar{\Omega}} \tilde{K}_{\varepsilon/n}(y(x)) |J[y(x)]| dx < 1$$

erfüllt ist.

§ 3 Einfache Nullstellengebilde auf der Einheitssphäre

Wir behandeln hier den speziellen Fall von Nullstellengebilden einer reellen differenzierbaren Funktion einer Variablen auf der Einheitssphäre.

Satz 3.1: Voraussetzungen: Sei $f(t)$ eine reelle Funktion, welche auf dem Intervall $J = [-1, +1]$ definiert sei und zur Klasse $C^1(J)$ gehöre. Ferner besitze f auf J m verschiedene Nullstellen s_{μ}^* , $\mu = 1, 2, \dots, m$ und keine Berührungspunkte. m' sei die Anzahl der Nullstellen auf $] -1, +1[$. $g(t)$ sei eine ebenfalls auf J definierte und integrierbare Funktion, welche zudem an den Nullstellen von f stetig sei und $K_{\varepsilon/1}$ sei ein Element der Klasse $[K]_1$.

Dann gilt für jedes feste aber sonst frei wählbare $v = 1, 2, 3, \dots$ die folgende Beziehung:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{|x|=1} g(x) K_\epsilon(f(x_v)) dx_1 \dots dx_v \dots dx_n =$$

$$x = x_1, \dots, x_n$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sum_{\mu=1}^n \frac{(1-s_\mu^*)^{\frac{n-3}{2}} g(s_\mu^*)}{|f'(s_\mu^*)|} +$$

$$*) \frac{n-5}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \cdot \frac{g(-1)}{|f'(-1)|}$$

*) Besitzt f an der Stelle -1 keine Nullstelle, so verschwindet der zweite Term.

Beweis: Wir haben zunächst für jedes fest $\epsilon > 0$:

$$\int_{|x|=1} g(x) K_\epsilon(f(x_\mu)) dx =$$

$$= \int_{|y|<1} \frac{g(+\sqrt{1-y^2}) K_\epsilon(f(+\sqrt{1-y^2})) + g(-\sqrt{1-y^2}) K_\epsilon(f(-\sqrt{1-y^2}))}{\sqrt{1-y^2}} dy_1 \dots dy_{n-1}$$

$$= \omega_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} (1-r)^{-\frac{1}{2}} (g(+\sqrt{1-r^2}) K_\epsilon(f(+\sqrt{1-r^2})) + g(-\sqrt{1-r^2}) K_\epsilon(f(-\sqrt{1-r^2}))) dr$$

(Dabei ist ω_{n-1} der Inhalt der $n-1$ dimensionalen Einheits-sphäre:

$$\omega_{n-1} = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \omega_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-s)^{\frac{n-3}{2}} g(s) K_\epsilon(f(s)) ds$$

Für Nullstellen s_i^* im Innern des Intervalls J gilt nun weiter:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-1}^{+1} (1-s)^{\frac{n-3}{2}} g(s) K_\varepsilon(f(s)) ds &= \\ &= \sum_{i=1}^{m'} \frac{(1-s_i^*)^{\frac{n-3}{2}} g(s_i^*)}{|f'(s_i^*)|} \end{aligned}$$

Ist der Punkt -1 eine Nullstelle, so können wir ein $\delta > 0$ wählen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-1}^{-1+\delta} (1-s)^{\frac{n-3}{2}} g(s) K_\varepsilon(f(s)) ds &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1-s)^{\frac{n-3}{2}} g(-1)}{|f'(-1)|} \end{aligned}$$

Für den zweiten Randpunkt $+1$ verschwindet der entsprechende Grenzwert, so daß wir im Fall der Existenz von Nullstellen im Punkt -1 und im Innern des Intervalls die folgende Beziehung erhalten:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-1}^{+1} (1-s)^{\frac{n-3}{2}} g(s) K_\varepsilon(f(s)) ds &= \\ &= \sum_{\mu=1}^{m'} \frac{(1-s_\mu^*)^{\frac{n-3}{2}} g(s_\mu^*)}{|f'(s_\mu^*)|} + \frac{(1-s)^{\frac{n-5}{2}} g(-1)}{|f'(-1)|} \end{aligned}$$

§ 4 Über eine Anwendung des Gaußschen Satzes

Es ist interessant, den Gaußschen Satz innerhalb unserer Untersuchung anzuwenden: Wir betrachten das folgende Integral für $\epsilon > 0$:

$$\int_S K_\epsilon(f(x(t))) \frac{\partial f}{\partial x_i} D^i dt_1 \dots dt_{n-1}, \quad n=1,2,\dots$$

Dabei bezeichne K_ϵ einen Kern der Klasse $[K]_1$, $f:\Omega \rightarrow f(\Omega)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion welche das Gebiet Ω , dessen Rand frei von Singularitäten sei, auf ein Intervall $]a,b[= f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ abbildet.

Mit T_S bezeichnen wir das zu einer Teilfläche F_S von $\partial\Omega$ gehörige $n-1$ dimensionale Parametergebiet zu einem bestimmten Atlas von $\partial\Omega$: $\int_S F_S = \int_S F(T_S) = \partial\Omega$. $D(x) \in \mathbb{R}^n$ sei die normierte, in das Innengebiet von Ω weisende Flächennormale von $\partial\Omega$ im Punkte x .

Für jedes $\epsilon > 0$ folgt dann sofort:

$$\begin{aligned} & \int_S K_\epsilon(f(x(t))) \frac{\partial f}{\partial x_i} D^i dt_1 \dots dt_{n-1} = \\ & = \int_\Omega [K'_\epsilon(f(y)) (\nabla f(y))^2 + K_\epsilon(f(y)) \nabla^2 f(y)] dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

und wir haben

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_S K_\epsilon (f(x(t))) (\nabla f \cdot D) dt_1 \dots dt_{n-1} =$$

$$\int_S T_S \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\Omega [K'_\epsilon (f(y)) (\nabla f)^2 + K_\epsilon (f(y)) (\nabla^2 f)] dy_1 \dots dy_n.$$

Weiter haben wir für zweimal stetig differenzierbare Funktionen P und differenzierbare Kerne $K_{\epsilon/n}$:

$$P(x) = P^1(x_1, \dots, x_n), \dots, P^n(x_1, \dots, x_n) \quad n=2, 3, \dots$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_S K_{\epsilon/n} (P(x)) \frac{\partial P^i}{\partial x_j} D dt_1 \dots dt_{n-1} =$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\Omega [\nabla K_{\epsilon/n} (P(x)) \left(\frac{\partial P^i}{\partial x_j}\right)^2 + K_{\epsilon/n} (P(x)) \frac{\partial^2 P^i}{\partial x_j \partial x_k}] dx_1 \dots dx_n$$

$$i, j, k=1, \dots, n$$

Diese beiden Ergebnisse werden durch die folgende Beziehung impliziert:

$$\text{Bezeichnet } Q(x) = (Q^1(x_1, \dots, x_n), \dots, Q^n(x_1, \dots, x_n))$$

eine auf Ω differenzierbare Funktion, welche auf $\bar{\Omega}$ noch stetig sei, so gilt für differenzierbare Kerne $K_{\epsilon/n} \in [K]_n$:

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_S K_{\epsilon/n} (P(x)) (Q(x), D) dt_1 \dots dt_{n-1} =$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_\Omega [\nabla K_{\epsilon/n} (P(x)) \left(\frac{\partial P^i}{\partial x_j} Q(x)\right) + K_{\epsilon/n} (P(x)) (\nabla Q(x))] dx_1 \dots dx_n$$

§ 5 Hyperflächen als Nullstellengebilde

Als wesentliches Ergebnis dieser Arbeit zeigen wir nun den folgenden

Satz 5.1: Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n und sei $f = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ aus der Klasse $C^1(\Omega)$. Der zur Abbildung f gehörige Kern bestehe aus einem q -dimensionalen Hyperflächenstück zu welchem die Parameterdarstellung

$$y: = (y_1(t_1, \dots, t_r), \dots, y_n(t_1, \dots, t_r)), \quad r < n; \quad r, n = 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{R}^r \supset T \rightarrow y(T) = \text{Kern}(f/\Omega) \subset \mathbb{R}^n, \quad y \in C^1(T)$$

existiert mit einem gewissen Parametergebiet T .

Ferner existiere zu $\text{Kern}(f/\Omega)$ eine weitere Abbildung

$$g: = (g_1(t_1, \dots, t_r, s_1, \dots, s_{n-r}), \dots, \\ g_n(t_1, \dots, t_r, s_1, \dots, s_{n-r}))$$

mit

$T \times S \rightarrow g(T, S) \subset \mathbb{R}^n$, welche für jedes $t \in T$ lokal topologisch sei:

$$\left| \frac{dg}{ds_1}(t, s) \wedge \frac{dg}{ds_2}(t, s) \wedge \dots \wedge \frac{dg}{ds_{n-r}}(t, s) \right| = |D(g(t, s))| = \alpha \neq 0$$

für $t \in T$, wobei wir O.E. sogar $|\alpha| = 1$ annehmen dürfen.

$F(x) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_p(x_1, \dots, x_n))$ sei eine auf Ω beschränkte Funktion der Klasse $C^0(\text{Kern}(f/\Omega))$.

(Im übrigen ist diese Funktion nur als Gewichtung der Hyperfläche $\text{Kern}(f/\Omega)$ zu betrachten. Im einfachsten Fall können wir für sie die Konstante $F(x)=1$ wählen.)

Dann gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} F(x) K_{\varepsilon/r/n}(f(x)) dx =$$

$$\varepsilon > 0$$

$$dx = dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{\text{Kern}(f/\Omega)} |D(g(t,0))|^{-1} F(y) d\omega$$

($d\omega$ bezeichne das r -dimensionale Flächenelement von $\text{Kern}(f/\Omega)$)

$$= \int_{T \subset \mathbb{R}^r} |D(g(t,0))|^{-1} F(y(t)) \cdot \left| \frac{dy}{dt_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy}{dt_r} \right| dt_1 \dots dt_r.$$

[Ein ähnlicher Zusammenhang ergibt sich falls wir an Stelle des Kerns $K_{\varepsilon/r}$ einen solchen der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_q^{\alpha_q}} K_{\varepsilon/r/n}(x) = K_{\varepsilon/r}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \text{ verwenden}$$

In diesem Fall haben wir (mit der entsprechenden Forderung nach Differenzierbarkeit) in den letzten Formeln den Term $F(y)$ durch $F^{\alpha_1 \dots \alpha_q}(y) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_q}}{\partial u_1^{\alpha_1} \dots \partial u_r^{\alpha_r}} F(y(t))$

zu ersetzen, da dieser Kern im wesentlichen die gleichen Eigenschaften wie der verwendete besitzt.]

Der Beweis folgt mit der Transformationsregel hauptsächlich aus der Entwicklung der Funktion f nach den Termen y und g :

Da F beschränkt und der Kern $K_{\varepsilon/r}$ normiert ist, folgt zunächst die Existenz des Grenzwertes $J =:$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int F(x) K_{\epsilon/r}(f(x)) dx =$$

$$= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(\int_{\text{Kern}(f/\Omega)} \dots dx + \int_{\Omega - \text{Kern}(f/\Omega)} \dots dx \right)$$

dabei verschwindet der zweite Term in der Klammer wegen Eigenschaft (C).

$$\text{Mit } [\text{Kern}(f/\Omega)]_{\delta}^* =: y(T) + g(T, S^*)$$

$$S^* = \{s \in S \mid |s| < \delta, \delta > 0\}$$

haben wir:

$$\int F(x) K_{\epsilon/r}(f(x)) dx \xrightarrow[\delta > 0]{\delta \rightarrow 0} \int_{\text{Kern}(f/\Omega)} F(x) dx \xrightarrow[\epsilon > 0]{\epsilon \rightarrow 0} J$$

Weiter gilt:

$$\int F(x) K_{\epsilon/r}(f(x)) dx =$$

$$[\text{Kern}(f/\Omega)]_{\delta}^*$$

$$= \int_{T \times S^*} F(y(t) + g(t, s)) K_{\epsilon/r}(f(y(t) + [\frac{\partial f}{\partial g}(t, s)] \cdot s + O(t, s))) \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{\partial y}{\partial t_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial y}{\partial t_r} \right| \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial s_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial g}{\partial s_{n-r}} \right| dt_1 \dots dt_r ds_1 \dots ds_{n-r}$$

$$\text{mit } \lim_{|s| \rightarrow 0} \left| \frac{O(t, s)}{|s|} \right| = \lim_{|s| \rightarrow 0} |g(t, s)| = 0$$

wegen

$$\left| \frac{\partial g}{\partial s_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial g}{\partial s_{n-r}} \right| \equiv 1 \text{ f\"ur } t \in T \text{ folgt:}$$

$$= \int_{T \times S^*} F(y(t) + g(t, s)) K_{\epsilon/r}([\frac{\partial f}{\partial g}(t, s)] \cdot s + O(t, s)) \underbrace{\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|}_{d\omega_t} dt ds \xrightarrow[\delta > 0]{\delta \rightarrow 0}$$

$$\int_{T \times S_{\delta}^*} F(y(t)) K_{\varepsilon/r}(u+O(t,0)) \left| \frac{\partial f}{\partial g_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial f}{\partial g_{n-r}}(t,0) \right|^{-1} d\omega_t du \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} \\ \rightarrow \int_T F(y(t)) |D(g(t,0))|^{-1} d\omega_t$$

LITERATUR

- (1) Brouwer, L.E.J.: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71, (1912), S. 97 - 115.
- (2) Heinz, E.: An Elementary Analytic Theory of Degree of Mapping in n-dimensional Space. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 8, Nr. 2, March 1959, S. 231 - 248.
- (3) Kießler, G.: Über neue elementare Residuensätze für n-dimensionale Gebiete mit einer Anwendung auf den Hauptsatz der Theorie der impliziten Funktionen und der Theorie der nichtlinearen Optimierung. Acta Albertina, Vol. 34, 1974, S. 17 - 57.
- (4) Lighthill, M.J.: Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen. (deutsche Übers. von Introduction to Fourier analysis and generalised functions.) Mannheim 1966.
- (5) Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris 1966.
- (6) Zemanian, A.H.: Distribution theory and transform analysis. New York 1965.