

Über neue elementare Residuensätze für n-dimensionale Gebiete
mit einer Anwendung auf den Hauptsatz der Theorie der impliziten
Funktionen und der Theorie der nichtlinearen Optimierung

von

Gerhard Kissler +)

I n h a l t

	Seite
Autorreferat	18
Einleitung	19
1. Eine Klasse von Kernfunktionen	20
2. Residuensätze für Gebiete im \mathbb{R}^2	22
3. Über die Theorie der impliziten Funktionen	29
4. Charakteristische Funktionen	35
5. Eine Methode zur genauen Bestimmung von Nullstellen	39
6. Über die Theorie der Maxima und Minima	46
7. Anwendungen und Beispiele	50
Bibliographie	56

Eingegangen am 3. September 1973

+) .

Anschrift des Verfassers: Gerhard Kissler, 8 München 80
Innere Wienerstr.46

Autorreferat

On new elementary residue-theorems for domains in n-dimensional space with applications to the main theorem of the theory of implicit functions and the theory of non-linear optimization

Since the publication of L.E.J. Brouwer: "Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten" (Math. Annalen 71 (1912) some efforts have been undertaken to examine the main properties of the so-called "degree of a map." The present note may be regarded as a continuation of these works, although Brouwer's results and the results of the following works have not been used here. It seems remarkable, that for understanding the principal theorems of this work it suffices to be acquainted only with the notion of the δ -function. It is moreover interesting, that by the principal theorems of this work a duality between the involution $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}$ and the δ -function is revealed. This means that there is a dual relationship between any known theorem of the theory of functions of one or several variables and those theorems in analysis in which the δ -function occurs. It is also shown that the elementary main theorem within the theory of implicit functions can be replaced by a more precise one - this means that it is possible to show by a closed formula the form of any implicit function. As a further application closed formulas are given for characteristic functions for the direct calculation of zeroes and also for the common problem of non-linear optimization.

Einleitung: Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen Ergebnis zum Gebiet der Distributionen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um eine bislang unbekannte Methode zur Berechnung von Nullstellen und Fixpunkten durch einfache Integration, wie wir sie bereits in der Cauchyschen Integralformel kennen.

Gerade weil diese Methode einfach erscheint, dürfte sie sowohl für die mehr abstrakte, nicht unmittelbar auf die Lösung eines konkret vorgegebenen Problems zielende Mathematik als auch für die reine Numerik von Interesse sein.

Der hier verwandte Formalismus zur Darstellung von Distributionen ist bewußt so gehalten, daß auch ein mit diesem Gebiet nicht oder wenig vertrauter Zugang zu den wesentlichen Ergebnissen findet.

Die dabei zutage tretende "ε-Terminologie" drückt gewissermaßen eine Unschärferelation für die praktische Mathematik aus. So sind ja Grenzwertberechnungen bei Verwendung eines "hinreichend kleinen" aber positiven, also endlichen Wertes für ϵ im praktischen Beispiel nie notwendig, da bereits ein gewöhnlicher Dezimalbruch mit endlich vielen Zahlensymbolen, die wir zum normalen Rechnen benutzen - im Regelfall ebenfalls nur angenähert festgelegt werden kann.

Es soll versucht werden, eine Abschätzungsformel in einer späteren Arbeit aufzustellen.

Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir versuchen, die aufgestellten Sätze durch Beispiele, die wir im letzten Kapitel zusammenfassen, zu erläutern. Besonders sei vermerkt, daß aufgrund der hier gezeigten Korrelation zwischen dem komplexen, normierten Integrationskern $\frac{1}{2\pi} \frac{1}{z}$ und der Deltafunktion jeder Satz der Funktionentheorie, in den die Involution $\frac{1}{z}$ eingeht, seine duale Entsprechung in der reellen Analysis - und umgekehrt - findet. Dabei treten weitere duale Beziehungen etwa zwischen Kurven - und Flächenintegral auf. Auch solche Beziehungen sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Schließlich sei noch betont, daß die Residuensätze in dieser Arbeit wie die bekannten Sätze der elementaren Funktionentheorie zur Ermittlung der Summe und Anzahl von Nullstellen in einem Gebiet dienen und damit wie diese eine Alternative zur iterativen Methode darstellen.

1. Eine Klasse von Kernfunktionen

Da diese Arbeit bewusst elementar gehalten ist, bringen wir hier eine einfache Wiederholung zum Begriff der δ -Schar:

Sei $[K]$ diejenige Menge reellwertiger, positiver Funktionen, für die gilt:

- (A) Jedes Element $K'_\epsilon \in [K]$ ist auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ definiert;
 d.h.: Für jedes positive ϵ ist
 $K'_\epsilon = K'_\epsilon(\epsilon, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =: K_\epsilon(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ als
 Funktion von $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ stetig und positiv.
- (B) Für jedes positive ϵ ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(u) du = 1, \quad du =: du_1 du_2 du_3 \dots du_n$$

- (C) Für jedes positive δ ist

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \int_{|u| > \delta} K_\epsilon(u) du = 0$$

Beispiel: Der sogenannte "Weierstraßsche Term":

$$\frac{e^{-\frac{|x|^2}{\epsilon}}}{(\sqrt{\pi\epsilon})^n} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Anmerkung: Der "Weierstraßsche Term" stellt einen Spezialfall für die Darstellung der sog. δ -Funktion dar.

Die " δ -Funktion" kann im wesentlichen durch einen einfachen Grenzprozeß, wie in der eben gezeigten Formel, durch eine Reihe, oder durch eine Integralformel dargestellt werden:

- a) Darstellung durch eine geschlossene Grenzwertformel:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{x}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{i\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{inx}}{x}$$

b) Darstellung durch eine Reihe:

Ist $\{\varphi_n(x)\}$ $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ein vollständig normiertes Orthogonalsystem, so ist

$$\delta(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^*(x) \varphi_n(y)$$

c) Darstellung durch ein Integral:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dz$$

Mit $[\bar{K}]$ bezeichnen wir diejenige Teilmenge von $[K]$, deren Elemente für jedes feste positive ε , (als Funktion von x) einen kompakten Träger haben und für die überdies gilt:

(D) Zu jedem positiven δ existiert ein positives ε mit

$$\bar{K}_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{für } |x| > \delta.$$

Lemma 1.1 : Sei $K_\varepsilon(x) \in [K]$ und sei $f(x) \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\varepsilon(y-x) f(y) dy.$$

Dann konvergiert $f_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$,

gleichmässig für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gegen $f(x)$:

$$f(x) \xrightarrow[\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0]{\text{gleichmässig}} f(x). \quad (\text{Ohne Beweis})$$

Lemma 1.2 : Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion der Klasse

$C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ ($\bar{\Omega}$ bezeichne die Abschliessung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Ferner sei $K_\varepsilon(x)$ ein Element der Klasse $[K]$, das für jedes feste, positive ε zur Klasse $C^k(\Omega)$ gehört, und D^α bezeichne den Differentialoperator

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$(\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha + \dots + \alpha_n)$$

Dann konvergiert das Integral

$$\int_{\Omega} f(y) D^{\alpha} K_{\epsilon}(y-x) dy \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0$$

gleichmäßig gegen die Funktion $(-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} f(x)$. (Ohne Beweis)

2. Residuensätze für Gebiete im \mathbb{R}^n

Satz 2.1 : Sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^n . Die Abbildung

$$y: x \rightarrow y(x) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)),$$

$\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, sei auf $\bar{\Omega}$ stetig und gehöre zur Klasse $C^1(\bar{\Omega})$.

Die Menge der a -Stellen von y , d.h. die Menge

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \Omega, y(x) = a \in \mathbb{R}^n, a \text{ fest}\}$ sei entweder leer oder bestehe nur aus isolierten Punkten. Für jedes $x \in \partial\Omega$ sei $y(x) \neq a$ und die Funktionaldeterminante $J[y(x)]$ sei an jeder a -Stelle von Null verschieden. Ferner sei $K_{\epsilon}(x)$ ein Element der Klasse $[K]$.

Dann existiert eine positive Zahl ϵ^* , so dass für alle $\epsilon < \epsilon^*$, $\epsilon > 0$ das Integral

$\int_{\Omega} \bar{K}_{\epsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx$ gleich der Anzahl der a -Stellen von y in Ω ist.

Beweis: Fall (a): Die Menge der a -Stellen in Ω ist leer. Dann ist die Menge der a -Stellen in ganz Ω leer. Auf $\bar{\Omega}$ nimmt die Funktion $z(x) = y(x) - a$ ein positives Minimum m_y an. Es ist deshalb möglich ein ϵ^* so zu wählen, dass der Träger von $K_{\epsilon^*}(x)$ innerhalb einer Kugel vom Radius $\frac{1}{2}m_y$ liegt. Daher verschwindet das obige Integral und wir haben $N = 0$.

Fall (b): Die Menge der a -Stellen in Ω besteht aus isolierten Punkten. Dann können wir zwei positive Zahlen ϵ^* und δ so wählen, dass gilt:

(I) Der Träger von $\bar{K}_{\epsilon}(x)$ ist ganz in einer Kugel $D_{\delta,0}$ um den Ursprung mit Radius δ enthalten.

(II) Zu jeder a -Stelle x_1 in Ω existiert eine abgeschlossene Umgebung U_1 , ($i = 1, 2, \dots, N$), so dass je zwei solcher Umgebungen zueinander disjunkt und ganz in Ω enthalten sind, sowie von den jeweiligen Restriktionen der Abbildungen $z: x \rightarrow y(x) - a$, auf U_1 topologisch auf $D_{\delta,0}$ abgebildet werden.

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{K}_{\varepsilon^*}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx &= \int_{\sum_1 U_1 = U} \bar{K}_{\varepsilon^*}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx + \\ &+ \int_{\Omega - U} \bar{K}_{\varepsilon^*}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx = \\ &\int_U \bar{K}_{\varepsilon^*}(y(x)) |J[z(x)]| dx + \\ &\int_{\Omega - U} \bar{K}_{\varepsilon^*}(z(x)) |J[z(x)]| dx = \\ &= \sum_1 \int_{U_1} \bar{K}_{\varepsilon^*}(u) du = N. \end{aligned}$$

Als Folgerung erhalten wir den

Satz 2.1a : Sei $K_{\varepsilon}(x)$ ein Element der Klasse $[K]$; sonstige Voraussetzungen wie vorher. Dann gilt:

Die Anzahl der a -Stellen von y in Ω ist gleich folgendem Grenzwert:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx.$$

Satz 2.2 : Voraussetzungen wie bei Satz 2.1a und zusätzlich: Die Menge der a -Stellen von y in Ω sei nicht leer. (Sie besteht daher nur aus isolierten Punkten).

Dann hat die Summe der a -Stellen von y in Ω den Wert:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\begin{array}{l} \int_{\Omega} x_1 K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \\ \int_{\Omega} x_2 K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} x_n K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \end{array} \right)$$

Beweis: Wir betrachten die k -te Komponente des obigen Ausdrucks. Zu einer beliebigen, aber fest gewählten a -Stelle x^* existiert eine Umgebung U^* , die von der Abbildung $z: x \rightarrow y(x) - a$ topologisch auf die Kugel $B_{\delta,0} = \{u \in \mathbb{R}^n \mid |u| < \delta\}$ $\delta > 0$, abgebildet wird.

\tilde{z} bezeichne die Restriktion von z auf U .

Es gilt:

$$\int_{U^*} x_k K_\varepsilon(y(x) - a) |J[y(x)]| dx = \int_{U^*} x_k K_\varepsilon(\tilde{z}(x)) |J[\tilde{z}(x)]| dx =$$

$$\int_{U^*} [\tilde{z}^{-1}(\tilde{z}(x))]_k K_\varepsilon(\tilde{z}(x)) |J[\tilde{z}(x)]| dx =$$

$$\int_{B_{\delta,0}} [\tilde{z}^{-1}(u)]_k K_\varepsilon(u) du \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} [\tilde{z}^{-1}(0)]_k = x_k^*.$$

Wegen Lemma 1.2 konvergiert das letzte Integral für

$[\tilde{z}^{-1}(0)]_k = x_k$ (k -te Komponente von x). Damit ist aber bereits alles gezeigt.

Wir bezeichnen die Sätze 2.1 und 2.2 als Residuensätze für Gebiete im \mathbb{R}^n .

Sie werden durch den folgenden, allgemeineren Satz impliziert:

Satz 2.3 : Voraussetzungen wie in Satz 2.2 und zusätzlich:

$$\text{Sei } f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^q, x \longrightarrow f(x) =$$

$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n))$, $n, q > 1$, eine Funktion der Klasse $C^0(\Omega)$.

Dann ist die Summe der Funktionswerte von f an den a -Stellen von y in Ω gleich folgendem Grenzwert:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\begin{array}{c} \int_{\Omega} f_1(x) K_\varepsilon(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \\ \int_{\Omega} f_2(x) K_\varepsilon(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_q(x) K_\varepsilon(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \end{array} \right)$$

Beweis: Wir betrachten die r -te Komponente des obigen Ausdrucks. Dabei verfahren wir wie vorher und wählen eine Umgebung U^* einer beliebigen, aber im folgenden festen a -Stelle x^* als Integrationsgebiet:

$$\int_{U^*} f_r(x) K_\varepsilon(y(x) - a) |J[y(x)]| dx =$$

$$\int_{U^*} f_r(\tilde{z}^{-1}(\tilde{z}(x))) K_\varepsilon(\tilde{z}(x)) |J[\tilde{z}(x)]| dx =$$

(\tilde{z} bezeichne wie vorher die Restriktion von $z: x \rightarrow y(x)$ auf U^*).

$$\int_{\tilde{z}(U^*)=B_{\delta,0}} f_r(\tilde{z}^{-1}(u)) K_\varepsilon(u) du \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} f_r(x).$$

Die Konvergenz dieses Integrals ist wiederum durch Lemma 1.2 sichergestellt. Wie vorher gilt damit der Satz für ganz Ω .

Korollar 2.3.1 : Voraussetzungen: (a) Es existiert mindestens ein Fixpunkt x^* von y in Ω . (b) Die Fixpunkte von y in Ω sind isolierte Punkte. (c) Kein Fixpunkt liegt auf dem Rande $\partial\Omega$. (d) Die Funktionaldeterminante der Funktion $y(x) - x$ ist an jedem Fixpunkt von Null verschieden. (e) Die Funktion $F(x) =: (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_l(x_1, x_2, \dots, x_n))$, $l \geq 1$ ist stetig.

Dann gilt: Die Summe der Funktionswerte von $F(x)$ an den Fixpunkten von y in Ω ist gleich dem Grenzwert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\begin{array}{l} \int_{\Omega} F_1(x) K_{\varepsilon}(y(x) - x) |J[y(x) - x]| dx \\ \int_{\Omega} F_2(x) K_{\varepsilon}(y(x) - x) |J[y(x) - x]| dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} F_l(x) K_{\varepsilon}(y(x) - x) |J[y(x) - x]| dx \end{array} \right)$$

Korollar 2.3.2 : Voraussetzungen ((a) oder (b) !) :

- (a) Es existiert genau eine a -Stelle von y in Ω sowie: $f(x)$ ist eine stetige Funktion und $g(x)$ ist stetig für $y \in f(\Omega)$.
 (b) f und g sind linear und komponierbar.

Dann gilt die folgende Vertauschungsregel:

$$g \circ f \left(\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} x K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \right) =$$

$$g \left(\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} f(x) K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} g \circ f(x) K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx.$$

Korollar 2.3.3 : Setzen wir für $F(x)$ die Funktion $\text{sign}(J[y(x)])$, so erhalten wir den sogenannten "Brouwer-Grad" :

$$d[y(x), \Omega, a] = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} \text{sign}(J[y(x)]) K_{\varepsilon}(y(x) - a) |J[y(x)]| dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} K_{\varepsilon}(y(x) - a) J[y(x)] dx.$$

Bevor wir auf die enge Wechselbeziehung zwischen den hier verwendeten Integrationskernen und den komplexen Funktionen

$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}$ beziehungsweise $(\frac{1}{2\pi i})^m \frac{1}{z_1 z_2 \dots z_m}$, $m = 1$ näher eingehen, bringen wir noch ein Ergebnis, welches sich mit Hilfe von Lemma 1.3 leicht ableiten lässt:

Satz 2.4 : Voraussetzungen wie in Satz 2.3 und zusätzlich:

Sei $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_q(x_1, \dots, x_n))$ eine Funktion der Klasse $C^k(y(\Omega))$, $k, q \geq 1$. $K(x)$ gehöre für jedes $\varepsilon > 0$ zur Klasse $C^k(\Omega)$. y_1^{-1} sei die für eine gewisse Umgebung U_1 der a -Stelle x_1 erklärte, und zur Differentiationsklasse $C^k(U_1)$ gehörige Umkehrfunktion von y . Ferner sei

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad 1 < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < k.$$

$(\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$

Dann gilt: Die Summe $\sum_1 [D(f \circ y_1^{-1})](a)$ hat den Wert

$$(-1)^\alpha \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int f(x) K_\varepsilon^\alpha(y(x) - a) |J[y(x)]| dx \in \mathbb{R}^q.$$

(mit $K_\varepsilon^\alpha(u) =: D^\alpha K_\varepsilon(u)$.)

Beweis: Aufgrund der Vertauschungsrelation für den Operator D^α haben wir für jeden Index m , $1 < m < q$:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{U_1} [D^\alpha (f_m \circ y_1^{-1})](y(x)) K_\varepsilon^\alpha(y(x) - a) |J[y(x)]| dx =$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (-1)^\alpha \int_{U_1} f_m(x) K_\varepsilon^\alpha(y(x) - a) |J[y(x)]| dx.$$

Dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.3 und Satz 2.2. Damit ist aber bereits alles gezeigt.

Satz 2.5 : Voraussetzungen: (a) Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen Ebene, auf dem die Funktion $f(z)$ holomorph ist.

(b) Sei C ein geschlossener, doppelpunktfreier, positiv orientierter Weg, der zusammen mit seinem Innengebiet Ω_C ganz zu Ω gehört.

(c) Sei $K_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(t_1, t_2)$ ein Element der Klasse $[K]$, welches für alle $\varepsilon \rightarrow 0$ und alle Paare reeller Zahlen $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ erklärt ist.

Dann gilt: Bezeichnen wir $z = x + iy$, wobei x und y reelle Variable seien, so gilt für jede komplexe Zahl $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$ die Beziehung:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(u)}{u - z_0} du = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} f(x + iy) K_\varepsilon(x - x_0, y - y_0) dx dy.$$

Anmerkung: Man beachte die Ähnlichkeit der entsprechenden Ableitungsformeln!

Beweis: Die Behauptung folgt ohne Schwierigkeiten sofort aus Lemma 1.2.

Wir wollen nun die Elemente der Klasse $[K]$ dazu benützen, die üblichen älteren Residuensätze der Funktionentheorie schärfer zu fassen:

Satz 2.6 : Voraussetzungen (a), (b), (c) wie vorher und zusätzlich:
(d) Sei $f(z) \neq 0$ für $z \in \partial\Omega$.

(I) Ist $\bar{K}_\varepsilon(t_1, t_2)$ ein festes Element der Klasse $[K]$, das entsprechend der Bedingung (c) gewählt ist, so kann eine $\varepsilon^* > 0$ so gewählt werden, dass für alle positiven $\varepsilon < \varepsilon^*$ gilt:

(I,1) Die "arithmetische" Zahl der Nullstellen von $f(z)$ in Ω , d.h. die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in Ω :

$N = \sum_1 N_1$, $N_1 = 1$ für alle i , ist gleich folgendem Integral:

$$\int_{\Omega} \bar{K}_\varepsilon(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(x + iy)) |f'(x + iy)| dx dy$$

(I,2) Die "algebraische" Zahl der Nullstellen von $f(z)$ in Ω : $N = \sum_1 \operatorname{sign}(f'(z_1))$ ist gleich dem folgendem Integral:

$$\int_{\Omega} \bar{K}_\varepsilon(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(x + iy)) f'(x + iy) dx dy$$

mit $\operatorname{sign}(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z = 0 \\ \frac{z}{|z|} & \text{für } z \neq 0. \end{cases}$

(II) Ist $K_\varepsilon(t_1, t_2)$ ein festes Element der Klasse $[K]$ und existiert in Ω eine Nullstelle z , so gilt:

(II,1) Die "arithmetische" Summe der Nullstellen von $f(z)$ in Ω , d.h. die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ in Ω ist gleich dem folgenden Integral:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} (x + iy) K_{\varepsilon}(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) |f'(x + iy)| dx dy.$$

(II,2) Die "algebraische" Summe der Nullstellen von $f(z)$ in Ω , d.h. die Summe $\sum \operatorname{sign}(f'(z_1)) z_1$, ist gleich dem folgende

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} (x + iy) K_{\varepsilon}(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) f'(x + iy) dx dy.$$

Beweis: Wir wenden die Sätze 2.1 und 2.2 auf unser zweidimensionales Problem an und haben dabei nur zu beachten, dass der Absolutbetrag der komplexen Ableitung, $f'(z)$, gleich der entsprechenden Funktionaldeterminante ist.

Der folgende Satz bringt eine Analogie zu Satz 2.3 und schliesst die zweite Aussage von 2.6 ein:

Satz 2.7 : Voraussetzungen (a), (b), (c), (d) von Satz 2.6 und zusätzlich: (e) Sei $p(z)$ eine reell- oder komplexwertige Funktion, welche auf Ω stetig ist.

Dann gilt: (I) Die "arithmetische" Summe der Funktionswerte von $p(z)$ an den Nullstellen von $f(z)$ in Ω : $\sum_1 p(z_1)$ hat den Wert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} p(x + iy) K_{\varepsilon}(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) |f'(x + iy)| dx dy.$$

(II) Die entsprechende "algebraische" Summe, d.h. die Summe $\sum_1 \operatorname{sign}(f'(z_1)) p(z_1)$, hat den Wert

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega} p(x + iy) K_{\varepsilon}(\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) f'(x + iy) dx dy.$$

Beweis: Beide Teile dieses Satzes folgen unmittelbar aus Lemma 1.2 und Satz 2.3.

3. Über die Theorie der impliziten Funktionen

Es ist das Ziel dieses Abschnittes, implizit definierte Funktionen erstmals durch einen allgemeingültigen, expliziten Ausdruck, in den wesentlich die vorigen Integralformeln eingehen, darzustellen. Der Hauptsatz über implizite Funktionen wird dadurch zu einem Darstellungssatz erweitert.

Zur Erläuterung der hier verwendeten Bezeichnungsweise bringen wir zunächst folgende Wiederholung:

Sei $g(x, y) = (g_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l), \dots, g_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l))$ mit $k, l > 1$, eine Funktion, welche für alle x aus einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und für alle y aus einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^l$ definiert ist, und deren Werte im \mathbb{R}^l liegen.

Existiert dann zu einer nicht-leeren Teilmenge U_0 von U eine nicht-leere Teilmenge V_0 von V , so dass für jedes $x^* \in U_0$ die Funktion $F_{x^*}(y) =: g(x^*, y)$ auf V_0 definiert ist und dort genau eine Nullstelle $y^* : g(x^*, y^*) = 0$ besitzt, so sagen wir, dass durch $g(x, y) = 0$ eine Funktion $f(x)$ implizit definiert ist: $g(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U_0$.

Wir setzen nun voraus, dass $g(x, y)$ eine vorgegebene Funktion ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

(I) $g(x, y)$ gehört für jedes feste x aus einer offenen, nicht-leeren Menge $U \subset \mathbb{R}^k$, als Funktion von y , zu den Klassen $C^0(\bar{V})$ und $C^1(V)$. (\bar{V} bezeichne die Abschliessung von $V \subset \mathbb{R}^l$).

(II) Für jedes Wertepaar $(x, y) \in U \times \bar{V}$ mit $g(x, y) = 0$ ist die Funktionaldeterminante von Null verschieden:

$$J_y[g(x, y)] =: \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j} (x, y) \right) \neq 0$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, l)$$

Satz 3.1 : (A) Voraussetzungen (I) und (II) sowie: Sei $\bar{K}_\varepsilon(u)$, $u = u_1, u_2, \dots, u_l$, ein Element der Klasse $[K]$.

Sei $f(x)$ die durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ für alle x aus einer Menge $U_1 \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^k$, implizit definierte Funktionen: $g(x, f(x)) = 0$. Ferner sei die Menge $V_1 = g(U_1, f(U_1))$ eine Teilmenge des Gebietes $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^l$ und habe dort einen positiven Randabstand. Schliesslich sei $g(x, y) \neq 0$ für alle Wertepaare (x, y) der Menge $U \times \partial V_1$.

Dann existiert eine positive Zahl ε^* derart, dass für alle positiven $\varepsilon < \varepsilon^*$ die Funktion

$$\lambda_\varepsilon[g, V_1, x] =: \int_{V_1} \bar{K}_\varepsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy$$

auf U_1 erklärt ist und die folgende Beziehung erfüllt:

$$\lambda_\varepsilon[g, V_1, x] =: \begin{cases} 0 & \text{für } x \in U, x \notin U_1 \\ 1 & \text{für } x \in U, x \in U_1 \end{cases}$$

(B) Voraussetzungen (I) und (II) sowie: Sei $\bar{K}_\varepsilon(u)$ ein Element der Klasse $[K]$. Sei $(x_0, y_0) \in U \times V$ mit $g(x_0, y_0) = 0$. Ferner sei für jedes feste y aus einer gewissen Umgebung V_0 von y_0 , ($V_0 \subset V$), $g(x, y)$ als Funktion von x , in einer gewissen Umgebung U_0 von x_0 stetig. ($U_0 \subset U$).

Dann wird durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ eine auf U_0 stetige Funktion $f(x)$, deren Wertebereich in V_0 liegt, implizit definiert: $g(x', f(x')) = 0$ für alle $x' \in U_0$, und es ist $f(x') \in V_0$.

Beweis: (A) Unser Problem kann wie folgt auf das von Satz 2.1 zurückgeführt werden: Zu jedem vorgegebenen $x \in U_1$ bestimmen wir die einzige (und isolierte) Nullstelle der Funktion $F_x(y) =: g(x, y)$ in V_1 . Da V_1 einen positiven Randabstand hat, können wir zu einem fest gewählten Element $\bar{K}_\varepsilon(u) \in [K]$ ein $\varepsilon^* > 0$ so bestimmen, dass für jedes positive $\varepsilon < \varepsilon^*$ die Beziehung

$$\lambda_\varepsilon[g, V_1, x] = 1 \text{ gilt.}$$

Es sei hier bemerkt, dass die Darstellung von $\lambda_\varepsilon[g, V_1, x]$ auch dann gültig ist, wenn $g(x, y)$ in x nicht stetig ist.

(B) In diesem Fall haben wir für die Funktion $\lambda_\varepsilon[g, V_1, x]$ eine genügend kleine Zahl $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes Gebiet V_1 zu wählen. Wir gehen dazu wie folgt vor: Wegen der Stetigkeit von $g(x, y)$ in beiden Variablen x und y , beziehungsweise da g für jedes feste x , als Funktion von y , lokal topologisch ist, können wir eine Umgebung $U' \subset U$ von x so wählen, dass die Funktionen $F_x(y) =: g(x, y)$, x fest $\in U'$, auf einer gewissen Umgebung $V_0 \subset V$ von y_0 (gemeinsam) definiert und stetig sind.

Innerhalb der Umgebung U' von x_0 können wir eine weitere Umgebung U_0 von x_0 so wählen, dass $g(U_0, V_0)$ eine Teilmenge von $g(U', V)$ ist und dort einen positiven Randabstand hat. Folglich existiert ein $\varepsilon^* > 0$, so dass für alle $\varepsilon < \varepsilon^*$, $\varepsilon > 0$, gilt:

$$\lambda_\varepsilon[g, V_0, x] = 1 \text{ oder } 0 \text{ für alle } x \in U_0.$$

Aus der Stetigkeit von g , und deshalb von $\lambda_\varepsilon[g, V_0, x]$, folgt dann alles weitere.

Wir setzen $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \lambda_\varepsilon[g, V, x] =: \lambda[g, V, x]$.

Der Term $\lambda[g, V, x]$ kann übrigens dazu benutzt werden für kompliziert strukturierte Mengen im \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n die charakteristische Funktion zu konstruieren. Sei beispielsweise eine differenzierbare Funktion $p(x)$, die ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^k$ auf ein Gebiet $p(G) \subset \mathbb{R}^k$ abbildet, vorgegeben. Wollen wir nun für irgendeine Teilmenge M (die lediglich die entsprechenden Eigenschaften wie vorher V_1 und V_0 besitzen soll) von $p(G)$ die charakteristische Funktion der Urbildmenge $M^* : p(M^*) = M$ konstruieren, so brauchen wir nur in obigem Term für $g(x, y)$ die Funktion $y - p(x)$ zu setzen.

Satz 3.2 : Voraussetzungen (I), (II) und : Sei $K_\varepsilon(u) \in [K]$ und sei $g(x, y) =$

$(g_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l), \dots, g_l(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l))$, $k, l \geq 1$, eine auf $U \times V$ erklärte Funktion. ($\mathbb{R}^k \supset U$ sei dabei eine offene, nichtleere Menge, V ein Gebiet im \mathbb{R}^l). Für jedes feste $y \in V$ gehöre $g(x, y)$, als Funktion von x , zur Klasse $C^j(U)$, $j \geq 0$. Schliesslich sei noch für ein Wertepaar $(x_0, y_0) \in U \times V$ die Gleichung $g(x_0, y_0) = 0$ erfüllt.

Dann existieren Umgebungen U_0 und V_0 von x_0 und y_0 , so dass die Funktion $\mu[g, V_0, x] =$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\begin{array}{c} \int_{V_0} y_1 K_\varepsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \\ \int_{V_0} y_2 K_\varepsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \\ \vdots \\ \int_{V_0} y_l K_\varepsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \end{array} \right)$$

zur Klasse $C^j(U_0)$ gehört und für alle $x \in U_0$ die Gleichung $g(x, \mu[g, V_0, x]) = 0$ erfüllt.

Beweis: Nach dem vorigen Satz ist klar, dass solche Umgebungen U_0 und V_0 und eine Funktion $f(x)$ existieren mit $g(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U_0$. Damit kann das Problem aber auf das von Satz 3.2 zurückgeführt werden. Wir haben nämlich nur für jedes feste $x^* \in U_0$ die einzige (und isolierte) Nullstelle von $F_{x^*}(y) =: g(x^*, y)$

innerhalb von V_0 zu bestimmen. Aus der Darstellung der Funktion $\mu[g, V_0, x]$ folgt dann auch die Aussage bezüglich des Differentiationsgrades j .

Bekanntlich ist das Problem der Konstruktion von inversen Funktionen in einfacher Weise mit dem der Konstruktion impliziter Funktionen verbunden.

Als eine Anwendung des vorigen Satzes bringen wir daher das folgende

Korollar 3.2.1 : Seien G und G' zwei Gebiete im \mathbb{R}^k , $k \geq 1$.

Die Abbildung $f(x) : G \rightarrow G'$ sei eineindeutig und gehöre zur Klasse $C^1(G)$. Ferner sei die Funktionaldeterminante $J[f(x)] \neq 0$ für alle $x \in G$ und $K_\epsilon(u)$ sei ein Element der Klasse $[K]$.

$$\text{Dann gilt für jedes } y \in G: \mu[y-f(x), G, y] =$$

$$f^{-1}(y) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(\begin{array}{c} \int_G x_1 K_\epsilon(y-f(x)) |J[f(x)]| dx \\ \int_G x_2 K_\epsilon(y-f(x)) |J[f(x)]| dx \\ \vdots \\ \int_G x_k K_\epsilon(y-f(x)) |J[f(x)]| dx \end{array} \right)$$

Satz 3.3 : Voraussetzungen wie bei Satz 3.2 und zusätzlich:

Sei $f(x)$ die durch $g(x, y) = 0$ implizit definierte Funktion: $g(x, f(x)) = 0$ für $x \in U \subset \mathbb{R}^1$. Sei weiter $h(x, y) = (h_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_1), \dots, h_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_1))$ $s, k, l > 1$, eine Funktion, welche für alle Werte-Paare $(x, y) \in U \times \bar{G}$ erklärt ist und die für jedes feste $x \in U$, (als Funktion von y allein), zur Klasse $C^0(G)$ gehört.

$$\text{Dann gilt für jedes } x \in \bar{U} \text{ die Beziehung:}$$

$$h(x, f(x)) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left(\begin{array}{c} \int_G h_1(x, y) K_\epsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \\ \int_G h_2(x, y) K_\epsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \\ \vdots \\ \int_G h_s(x, y) K_\epsilon(g(x, y)) |J_y[g(x, y)]| dy \end{array} \right)$$

Beweis: Für jedes feste $x^* \in U$ ist die Funktion $F_{x^*}(y) =: h(x^*, y)$ auf G stetig. Wir können deshalb Lemma 1.2 und Satz 2.3 anwenden. Damit sind wir aber bereits fertig.

Diesen letzten Satz wollen wir noch in entsprechender Form in die gewöhnliche Funktionentheorie übertragen:

Satz 3.4 : Voraussetzungen: (a) Sei $g(z_1, z_2)$ eine komplexwertige Funktion, welche auf $G_1 \times G_2 \in \mathbb{C}^2$, (G_1, G_2 Gebiete in \mathbb{C}) holomorph ist. (d.h.: $g(z_1, z_2)$ ist für jedes feste $z_1 \in G_1$, als Funktion von z_2 , holomorph auf G_2 und umgekehrt ist für jedes feste $z_2 \in G_2$, $g(z_1, z_2)$, als Funktion von z_1 , auf G_1 holomorph).

(b) Sei C ein einfach geschlossener, positiv orientierter Weg, der zusammen mit seinem Innengebiet G_C zu G_2 gehört. Für jedes Paar komplexer Zahlen $(z_1, z_2) \in G_1 \times \{C\}$ sei $g(z_1, z_2) \neq 0$. Für jedes feste $z^* \in G_1$ habe die Funktion $g(z^*, z)$ genau eine einfache Nullstelle \tilde{z} , welche innerhalb des Gebietes G_C liegt: $g(z^*, \tilde{z}) = 0$ für $\tilde{z} \in G_C$.

(c) Sei $h(z_1, z_2)$ eine komplexwertige Funktion, welche auf $G_1 \times G_2$ definiert und welche für jedes feste $z_1 \in G_1$, als Funktion von z_2 , auf G_2 holomorph ist.

Dann existiert genau eine Funktion $f(z)$, welche auf G_C holomorph ist und die Gleichung $g(z, f(z)) = 0$ für jedes $z \in G_C$ erfüllt.

Für die Funktion $H(z) =: h(z, f(z))$, welche auf G_C holomorph ist, gilt die Darstellung:

$$H(z) = h(z, f(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(z, v) g'(z, v)}{g(z, v)} dv$$

$$(g'(z, v) = \frac{d}{dv} g(z, v))$$

Beweis: Sei z^* ein fester Punkt aus dem Gebiet G_1 . Entsprechend der Voraussetzung hat die Funktion $F_{z^*}(u) =: g(z^*, u)$ innerhalb G_C genau eine Nullstelle $u_{z^*} : g(z^*, u_{z^*}) = 0$, und die Funktion $\frac{d}{du} g(z^*, u)$ hat genau einen einfachen Pol G_C .

Für eine gewisse Umgebung von u_{z^*} haben wir deshalb die folgende Laurent-Entwicklung:

$$\frac{d}{du} \frac{g(z^*, u)}{g(z^*, u)} = \frac{1}{u - u_{z^*}} + c_0(z^*) = c_1(z^*)(u - u_{z^*})^{-1} + \dots$$

Damit erhalten wir weiter:

$$\frac{h(z^*, z)(z^*, u)}{g(z^*, u)} = \frac{h(z^*, u)}{u - u_{z^*}} + r(z^*, u), \quad \text{wobei } r(z^*, u)$$

auf G_C holomorph ist und bei der Integration um C verschwindet. Die Abbildung $z^* \rightarrow u_{z^*}$ können wir dadurch darstellen, dass wir für die Funktion $h(z_1, z_2)$ die spezielle lineare Funktion z_1 setzen und die Cauchy'sche Integralformel verwenden:

$$h(z^*, u_{z^*}) = h(z^*, f(z^*)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(z^*, u)g'(z^*, u)}{g(z^*, u)} du.$$

4. Charakteristische Funktionen

Bereits in Paragraph 3 haben wir eine Methode zur Darstellung von Punktengen im \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n kennengelernt.

Wir konstruierten dort eine charakteristische Funktion für die Urbildmenge von solchen, implizit definierten Funktionen, deren Bildmenge, durch die Wahl des Integrationsgebietes, Einschränkungen unterlag.

Bevor wir diese Methode weiter untersuchen, wenden wir uns der Konstruktion von sogenannten Stufenfunktionen mittels der Elemente der Klasse $[K]$ zu. Wir erhalten dadurch die Möglichkeit, mittels Ungleichungen, Punktengen im \mathbb{R}^1 bzw. im \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n zu charakterisieren.

Lemma 4.1: Sei $K_\varepsilon(t)$ ein Element der Klasse $[K]$ mit

$K_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(-t)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $t \in \mathbb{R}$. $\bar{J} = [x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$ bezeichne ein abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} , auf dem die reellwertige Funktion $f(x)$ differenzierbar ist. Ferner sei

$$\tau_\varepsilon(f, a, b) =: \int_a^b K_\varepsilon(f(t)) f'(t) dt, \quad a, b \in \bar{J}$$

Dann gilt: (a) $\tau_\varepsilon(f, t_1, t_2) = -\tau_\varepsilon(f, t_2, t_1)$

für $t_1, t_2 \in \bar{J}$

(b) Ist x^* eine Nullstelle von f , welche in dem offenen Intervall (x_1, x_2) liegt, und für welche die Ableitung f' nicht verschwindet, so existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \tau_\varepsilon(f, x^* - \delta, x^* + \delta) = 1.$$

Beweis: (a) ist unmittelbar der Darstellung zu entnehmen,

(b) folgt aus Lemma 1.1.

Lemma 4.2: $K_\varepsilon(t)$ sei wie vorher definiert. $U =: [a, b]$,

$a < b$ sei ein abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} . f bezeichne eine reellwertige, auf U differenzierbare Funktion, welche an den Randpunkten die von 0 verschiedenen Werte $f(a) = r_1$ und $f(b) = r_2$ annimmt. An allen Nullstellen von f in U sei die Ableitung f' ungleich 0.

Dann existiert auf U die Funktion

$$\tau(f, a, x) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^x K_\varepsilon(f(t)) f'(t) dt + C_a$$

$$C_a =: \begin{cases} 1 & \text{für } r_1 > 0 \\ 0 & \text{für } r_1 < 0 \end{cases}$$

und es gilt:

$$\tau(f, a, x) = \begin{cases} 0 & \text{für } f(t) < 0, \quad t \in U \\ 1 & \text{für } f(t) > 0, \quad t \in U \end{cases}$$

Beweis: Zunächst ist klar, dass die Funktion f in U entweder keine, oder nur isolierte Nullstellen haben kann.

Existieren in U keine Nullstellen, so gewährleisten Lemma 1.1 und die spezielle Wahl der Konstanten C_a die Behauptung.

Im anderen Fall sind die Nullstellen anordenbar:

$x_1^* < x_2^* < x_3^* < \dots$ und es existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass für jede von ihnen ein Intervall $J_{x_i^*} =: [x_i^* - \delta, x_i^* + \delta]$, $i \in X =$

Indexmenge, ganz zu U gehört und keine weitere Nullstelle besitzt.

Ferner sind die Vorzeichen der Ableitungen für zwei aufeinanderfolgende Nullstellen x_k^* und x_{k+1}^* , $k, k+1 \in X$, verschieden:

$\text{sign}(f'(x_k^*)) = -\text{sign}(f'(x_{k+1}^*))$. Wegen Lemma 4.1 können wir nun

zu einem $x \in U$, mit $f(x) = r \neq 0$ und einem hinreichend klein gewählten, positiven δ , ein $\varepsilon^* > 0$ so bestimmen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \tau_{\varepsilon^*}(f, a, x) &= \sum_{\substack{i \in X \\ x_i^* + \delta < x}} \int_{x_i^*}^x K_{\varepsilon^*}(f(t)) f'(t) dt + C_a = \\ &= \sum_{\substack{i \in X \\ x_i^* + \delta < x}} \text{sign}(f'(x_i^*)) + C_a. \end{aligned}$$

(Damit folgt nun für den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$, alles weitere).

Neben der soeben dargestellten Konstruktion einer Stufenfunktion für differenzierbare Funktionen verweisen wir noch auf

Lemma 4.3: $F_\varepsilon(t)$ sei wie bei Lemma 4.1 definiert. f sei eine reellwertige, auf dem offenen Intervall (a, b) , $a < b$, stetige Funktion.

Dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$\sigma(f(x)) =: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_{\varepsilon}(f(x)) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{f(x)} K_{\varepsilon}(t) dt + \frac{1}{2}$$

auf (a, b) definiert und hat die Eigenschaft:

$$\sigma(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{für } f(x) = r_1 > 0 \\ 0 & \text{für } f(x) = r_2 < 0 \end{cases}$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall: $|f(t)| = r_1 > 0$ für ein $t \in (a, b)$. Es gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$- \int_0^r K_{\varepsilon}(t) dt = - \int_0^{-r} K_{\varepsilon}(t) dt \quad \text{und}$$

$$- \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^r K_{\varepsilon}(t) dt = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{-r} K_{\varepsilon}(t) dt = \frac{1}{2}, \text{ woraus unmittelbar}$$

die Behauptung folgt.

Allgemein gilt für charakteristische Funktionen:

Sind $\text{chr}(\Omega_1, x)$ und $\text{chr}(\Omega_2, x)$ zwei charakteristische Funktionen für zwei Mengen Ω_1 und $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$, (welche für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \supset (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ explizite vorgegeben seien), so haben wir:

$$\min(\text{chr}(\Omega_1, x), \text{chr}(\Omega_2, x)) = \text{chr}(\Omega_1 \cap \Omega_2, x),$$

$$\text{Max}(\text{chr}(\Omega_1, x), \text{chr}(\Omega_2, x)) = \text{chr}(\Omega_1 \cup \Omega_2, x).$$

Daraus folgt:

$$\text{chr}(\Omega_1 \cap \Omega_2, x) = \text{chr}(\Omega_1, x) \text{chr}(\Omega_2, x) \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \text{chr}(\Omega_1 \cup \Omega_2, x) &= \frac{1}{2}[\text{chr}(\Omega_1, x) + \text{chr}(\Omega_2, x) - \\ &\quad - \text{chr}(\Omega_1, x)\text{chr}(\Omega_2, x)]. \end{aligned}$$

Bezeichnet Ω^c die Komplementärmenge von Ω in G , dann gilt:

$$\text{chr}(\Omega^c, x) \cdot \text{chr}(\Omega, x) = 1.$$

Schliesslich wollen wir noch die in Paragraph 4 kurz erwähnte Methode zur Konstruktion einer charakteristischen Funktion erläutern:

Wir beschränken uns auf den folgenden einfachen Fall:

Sei $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ eine auf der Abschliessung eines beschränkten Gebietes \bar{Q} stetige Funktion mit der Wertemenge $f(\bar{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Q bezeichne eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , für die $f(\bar{Q}) - Q$ kompakt ist. Ferner seien M die Menge $\{x \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^n \mid x \in \bar{y} \in f(\bar{Q}) - Q\}$ und $K_\varepsilon(x)$ ein Element der Klasse $[K]$.

Dann ist $\lambda[f(x)-y, f(\bar{Q})-Q, x] =:$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{f(\bar{Q})-Q} K_\varepsilon(f(x) - y) dy$$

die charakteristische Funktion von M .

5. Eine Methode zur genauen Bestimmung von Nullstellen

In diesem Paragraphen wollen wir mit Hilfe der Ergebnisse der Paragraphen 3 und 4 eine Methode zur direkten Bestimmung von Nullstellen ausarbeiten.

Prinzipiell können wir Nullstellen von solchen Funktionen, auf die die Integralformeln des Paragraphen 3 anwendbar sind, dadurch finden, indem wir über solche Teilmengen der entsprechenden Definitionsgebiete integrieren, die im Innern genau eine Nullstelle besitzen.

Wir wollen diese Methode hier weiter entwickeln und beginnen mit der Nullstellenermittlung einer in einem Gebiet komplexwertigen, holomorphen Funktion $f(z)$. Auf die sehr enge Korrelation zwischen den Integrationskernen der Klasse $[K]$ und der Abbildung $[(2\pi i)z]^{-1}$ wurde bereits früher hingewiesen.

Satz 5.1: (A) Sei $f(z)$ eine in einem einfach-zusammenhängenden Gebiet Ω der komplexen Ebene holomorphe Funktion.

(B) Sei $[C]$ eine Menge von doppelpunktfreien, geschlossenen Wegen in der komplexen Ebene mit den folgenden Eigenschaften: Zu jedem Zahlenpaar $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = [0, \infty)^2$, $t_1 < t_2$, existieren in $[C]$ zwei Wege C_{t_1} und C_{t_2} mit den Eigenschaften:

C_{t_1} und C_{t_2} umschliessen je zwei einfach zusammenhängende Gebiete Ω_{t_1} und Ω_{t_2} , wobei $C_{t_1} = \dot{\Omega}_{t_1}$ $i = 1, 2$, und $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$ für $0 < t_1 < t_2$ gilt.

Zu jedem Punkt z ausserhalb eines, zu einem Weg $C_j \in [C]$ gehörenden Gebietes, mit dem Randabstand $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$, so dass der Weg $C_k = C_{j+\delta} \in [C]$ durch diesen Punkt führt. Für jedes $j < \infty$ ist das zu C_j gehörende Gebiet Ω_j beschränkt.

(C) Die Funktion $f(z)$ habe auf $\Omega_0: C_0 = \dot{\Omega}_0$ keine, und auf jedem Weg $C_t \in [C]$ jeweils höchstens eine Nullstelle.

(D) Sei $\{\sigma_\varepsilon(t)\}$ eine Folge von reellwertigen Funktionen, welche auf \mathbb{R} definiert sind, mit folgenden Eigenschaften:

$$\sigma_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{für } t < -\varepsilon < 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\sigma_\varepsilon(t_1) < \sigma_\varepsilon(t_2) \quad \text{für } t_1 < t_2 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$$

Ist dann $\phi(r)$ eine auf $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$ erklärte Funktion, die auf dem Definitionsbereich der Funktion

$$\tilde{\phi}(r) =: \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

mit dieser übereinstimmt, sofern diese einen reellen Wert annimmt, und sonst gleich 0 ist, so existiert für jedes M $0 < M < \infty$, der Grenzwert

$$G(M) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^M (1 - \sigma_\varepsilon(\tilde{\phi}(r))) dr.$$

und es gilt:

1.) Ist $M > G(M) > 0$, so liegt innerhalb $\Omega_{G(M)} \subset \Omega_M$ genau eine Nullstelle z^* zu der ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$z^* = \left(\int_{C_{G(M)+\delta}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right)^{-1} \cdot \int_{C_{G(M)+\delta}} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

2.) Ist $G(M) = M$, so liegt innerhalb der offenen Menge $\Omega_{G(M)}$ keine Nullstelle von $f(z)$.

Beweis: Liegt in Ω_M , $\dot{\Omega}_M = C_M$ keine Nullstelle, so ist offensichtlich $G(M) = M$.

Sei nun z^* eine Nullstelle von $f(z)$, welche auf dem Weg $C_1 \in [C]$, $0 < 1 < M$, liegt, mit minimalem 1. (d.h. z^* sei die erste Nullstelle, welche von den aufsteigenden Mengen $\Omega_1, C_1 \in [C]$ erfasst wird.

Für jede Zahl r mit $0 < r < 1$ ist dann

$$\tilde{\varphi}(r) = \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0, \text{ und wir haben:}$$

$$G(r) = \lim_{\varepsilon} \int_0^r (1 - \sigma_{\varepsilon}(\varphi(t))) dt = r.$$

Für $r = 1$ erhalten wir ebenfalls $G(1) = 1$.

Im Falle $r > 1$ liegt mindestens eine Nullstelle innerhalb des von dem Weg C_r umschlossenen Gebietes Ω_r , so dass wir $G(r) = G(1)$ erhalten. Ist z_2^* die zweite Nullstelle, die von den aufsteigenden Mengen Ω_1 erfasst wird, so gibt es ein $\rho > 0$ derart, dass z_2^* auf dem Weg $C_{1+\rho}$ liegt, so dass wir mit Hilfe der bekannten Residuensätze nach obiger Formel die erste Nullstelle z^* bestimmen können.

Anmerkung: Sind die Beträge der Nullstellen von $f : |z_i^*|$ $i \in X = \text{Indexmenge}$ paarweise verschieden, und ist f in einer kreisförmigen Umgebung des Nullpunktes, welche Nullstellen einschliesst, holomorph, so können wir für $[C]$ die Menge

$$\{C_r : C_r =: re^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi i, \quad r \in \mathbb{R}^+\} \text{ wählen.}$$

Ganz analog können wir für Vektorfunktionen mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante eine Methode zur Nullstellenermittlung beschreiben:

Satz 5.2 : (A) Sei $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$, eine Vektorfunktion, welche ein abgeschlossenes, einfach-zusammenhängendes Gebiet $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ in den \mathbb{R}^n abbildet und zur Klasse $C^1(\bar{\Omega})$ gehört. $f(x)$ besitze auf Ω nur isolierte Nullstellen, an denen die Funktionaldeterminante nicht verschwindet, und für die im übrigen (C) gilt.

(B) Sei $[\Omega] = \{\Omega_r \subset \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)\}$ eine Menge von aufsteigenden, abgeschlossenen Gebieten $\Omega_0 \subset \dots \subset \Omega_r \subset \dots \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

Zu jedem $r = 0$ existiert genau ein einfach-zusammenhängendes Gebiet Ω_r $[\Omega]$.

Zu zwei Zahlen r_1 und r_2 mit $0 < r_1 < r_2$ gibt es genau zwei Gebiete Ω_{r_1} und Ω_{r_2} in $[\Omega]$ derart, dass Ω_{r_1} eine echte Teilmenge von Ω_{r_2} ist: $\Omega_{r_1} \subset \Omega_{r_2}$.

Zu jedem Punkt $x \in \Omega$, der ausserhalb eines Gebietes Ω_s von $[\Omega]$ liegt, gibt es genau ein Gebiet Ω_r von $[\Omega]$ mit $r > s$, so dass x auf dem Rande von Ω_r liegt.

(C) $f(x)$ habe auf dem Gebiet Ω_0 keine Nullstelle und auf dem Rande eines jeden Gebietes Ω_r von $[\Omega]$ liege höchstens jeweils eine Nullstelle.

(D) $\{\sigma_\varepsilon(t)\}$ sei eine Folge von reellwertigen, auf \mathbb{R} erklärten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\sigma_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{für } t < -\varepsilon < 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\sigma_\varepsilon(t_1) \leq \sigma_\varepsilon(t_2) \quad \text{für } t_1 < t_2, \varepsilon > 0$$

Ist dann $\psi(r)$ eine auf ganz $\mathbb{R}^+ = [0, \infty]$ erklärte Funktion, die auf dem Definitionsgebiet der Funktion

$$\tilde{\psi}(r) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega_r} K_\varepsilon(f(x)) |J[f(x)]| dx$$

mit dieser übereinstimmt und sonst den Wert 0 annimmt, so existiert für jedes M , $0 < M < \infty$, der Grenzwert

$$L(M) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^M (1 - \sigma_\varepsilon(\psi(r))) dr$$

und es gilt:

1.) Ist $M > L(M) > 0$, so liegt innerhalb des Gebietes $\Omega_{L(M)} \subset \Omega_M$ genau eine Nullstelle x^* , zu der ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x^* = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega_{L(M)+\delta}} x K(f(x)) |J[f(x)]| dx.$$

2.) Ist $L(M) = M$, so liegt innerhalb des Gebietes $\Omega_{L(M)}$ keine Nullstelle von $f(x)$.

Beweis: Der Beweisgang ist nach der Residuensätze von §3 völlig analog zu dem des vorigen Satzes. Wir haben dabei statt der Funktion $\Phi(r)$ lediglich die Funktion $\psi(r)$ zu betrachten.

Setzen wir statt der Terme $G(r)$ bzw. $L(r)$ die Terme

$$G_m(r) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^r (1 - \sigma_\varepsilon(\Phi(r) - m)) dr \text{ bzw.}$$

$$L_m(r) =: \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^r (1 - \sigma_\varepsilon(\psi(r) - m)) dr, \quad m \in \mathbb{N}$$

so können wir die vorigen Sätze wie folgt verallgemeinern:

Satz 5.3: Voraussetzungen wie bei Satz 5.1.

Ist $M > 0$ und m eine positive, ganze Zahl, für die die Beziehung $0 < G_1(M) < G_2(M) < \dots < G_{m-1}(M) < G_m(M) < M$ gilt, so hat die Funktion $f(z)$ innerhalb des Gebietes $\Omega_{G_m(M)}$ m Nullstellen, wobei jede entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt wird.

Diejenige Nullstelle, welche von den aufsteigenden Abschliessungen der Gebiete $\Omega_0 \subset \dots \subset \Omega_p \subset \dots \subset \Omega_q \subset \dots$, $p < q \in \mathbb{R}$ an k -ter Stelle erfasst wird, hat den Wert:

$$z_k = \left[\int_{C_{G_k(M)+\delta}} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{C_{G_{k-1}(M)+\delta}} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right] \cdot \left[\int_{C_{G_k(M)+\delta}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{C_{G_{k-1}(M)+\delta}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right]^{-1}$$

Dabei ist δ eine positive Zahl, für die die Beziehung $0 < G_{k-1} + \delta < G_k < G_k + \delta < G_{k+1} < M$ gilt, die aber im übrigen willkürlich gewählt werden kann.

Beweis: Nach Satz 5.1 haben wir nur zu beachten, dass die k -te Nullstelle die Vielfachheit

$$N(k) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_{G_k(M)+\delta}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{C_{G_{k-1}(M)+\delta}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \right) \quad \text{hat.}$$

Mit dem entsprechenden Ansatz für die $N(k)$ -fache Nullstelle erhalten wir dann den gesuchten Wert.

Es sei hier bemerkt, dass der komplexe Integrationskern $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z}$ zwar in seiner Struktur einfacher ist als beispielsweise der von uns zu Anfang erwähnte Weierstrasssche Integrationskern. In der Anwendung für die entsprechenden Residuensätze erweist sich aber gerade, dass die Integrationskerne der Klasse $[K]$ einfacher zu handhaben sind, da bei ihnen insbesondere keine Vielfachheiten auftreten.

Satz 5.4 : Voraussetzungen wie bei Satz 5.2.

Ist $M > 0$ und m eine positive, ganze Zahl, für die die Beziehung $0 < L_1(M) < L_2(M) < \dots < L_m(M) < M$ gilt, so hat die Funktion $f(x)$ innerhalb des Gebietes $\Omega_{L_m(M)}$ genau m Nullstellen.

Diejenige Nullstelle, welche von den aufsteigenden abgeschlossenen Gebieten $\Omega_0 \subset \dots \subset \Omega_p \subset \dots \subset \Omega_q \subset \dots$, $p < q \in \mathbb{R}$, an k -ter Stelle erfasst wird, hat den Wert:

$$x_k = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{\Omega_{L_k(M)+\delta}} x K_\varepsilon(f(x)) |J[f(x)]| dx - \int_{\Omega_{L_{k-1}(M)+\delta}} x K_\varepsilon(f(x)) |J[f(x)]| dx \right) .$$

Dabei ist δ eine positive Zahl, für die die Beziehung $0 < L_{k-1}(M)+\delta < L_k(M) < L_k(M)+\delta < L_{k+1}(M) < M$ gilt, die aber im übrigen willkürlich gewählt werden kann.

Beweis: Wegen Satz 5.2 ist der Beweisgang einfacher als der von Satz 5.3, und in den wesentlichen Punkten völlig analog zu diesem.

Anmerkung: Das hier beschriebene Verfahren ist stark von der Wahl einer entsprechenden Ausschöpfungsfolge abhängig. Im Falle von Polynomen wird es etwa notwendig sein, die Koeffizienten auf etwaige Symmetrie der Nullstellen zu untersuchen.

Daneben mögen auch gewisse Transformationen (im einfachsten Fall Streckungen : $x \rightarrow \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$) Verwendung finden.

Ein bekanntes Verfahren zur Veränderung der Lage von Nullstellen bei Polynomen ist das folgende:

Sei $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ ein Polynom vom Grade n . Dann ist das Polynom $p(x) \cdot p(-x)$ gleich einem Polynom $P(x^2)$. Das Polynom $P(x)$ besitzt als Nullstellen die Quadrate der Nullstellen von $p(x)$: $x^* : p(x^*) = 0 \quad P(x^{*2}) = 0$. Es wird dadurch ein Näher- oder Auseinanderrücken der Nullstellen entsprechend ihrer Betragsgröße und Orientierung erreicht.

6. Über die Theorie der Maxima und Minima

In diesem Paragraphen verwenden wir die bisherigen Ergebnisse um absolute Maxima und Minima zu bestimmen.

Es bezeichne $\{\sigma_\varepsilon(t), \varepsilon > 0, t \in \mathbb{R}\}$ wieder eine Folge von reellwertigen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

$$\sigma_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > \varepsilon > 0 \\ 0 & \text{für } t < -\varepsilon < 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\sigma_\varepsilon(t_1) < \sigma_\varepsilon(t_2) \quad \text{für } t_1 < t_2.$$

Hilfssatz 6.1: Sei Ω eine kompakte Menge im \mathbb{R}^n , zu der eine Folge von Funktionen $\text{chr}_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\varepsilon > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$ existiert, die gegen die charakteristische Funktion von Ω konvergiert: $\text{chr}_\varepsilon(x) \rightarrow \text{chr}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei ferner $f(x)$ eine reellwertige Funktion der Klasse $C^0(\mathbb{R}^n)$.

Existiert dann für alle reellen Werte y aus einem Intervall $J = [a, b]$, $a < b$, die Grenzfunktion

$$E[\Omega, f, y] = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\mathbb{R}^n} \text{chr}_\varepsilon(x) \sigma_\varepsilon(f(x) - y) dx$$

So gilt: a) $E[\Omega, f, y]$ gehört zur Klasse $C^0(J)$

b) Für alle $x \in \Omega$ mit $f(x) \in J$ und $y \in J$ mit $y > f(x)$ ist

$$E[\Omega, f, y] > E[\Omega, f, f(x)].$$

Beweis: Sei $x^* \in \Omega$ fest gewählt. Dann sind die Mengen

$$\Omega_{f, y} = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \mid f(x) > y > f(x^*)\} \quad \text{für aufsteigende}$$

y ineinander enthalten:

$$\Omega_{f, y_1} \subset \Omega_{f, y_2} \subset \dots \subset \Omega_{f, y_s} \subset \dots \quad \text{für } y_1 < y_2 < \dots < y_s \dots$$

Für jedes feste $y < \infty$ konvergiert die Funktion $\text{chr}_\varepsilon(x) \sigma_\varepsilon(f(x) - y)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen die charakteristische Funktion von $\Omega_{f,y}$.

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert also $E_\varepsilon[\Omega, f, y] =:$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \text{chr}_\varepsilon(x) \sigma_\varepsilon(f(x) - y) dx$$

gerade gegen den Inhalt von $\Omega_{f,y} = E[\Omega, f, y]$.

Mit diesem Ergebnis lässt sich nun leicht der folgende, elementare Satz über Maxima und Minima beweisen:

Satz 6.2 : Voraussetzungen wie bei Hilfssatz 6.1.
Ferner sei die Grenzfunktion $E[\bar{\Omega}, f, y]$ für alle $y \in \mathbb{R}$ erklärt und stetig.

Dann gilt:

(I) Die Funktion $E[\bar{\Omega}, f, y]$ ist ausserhalb eines gewissen endlichen Intervalls

$J_M =: [\underline{y}_M, \overline{y}_M]$ konstant und für alle $y \in J_M$ streng monoton fallend. \underline{y}_M ist der Inhalt von $\bar{\Omega}, \overline{y}_M$ das Maximum von f auf $\bar{\Omega}$.

(II) Die Funktion $E[\bar{\Omega}, -f, y]$ ist für alle $y \in \mathbb{R}$ erklärt und stetig.

Ausserhalb eines gewissen Intervalles $J_m =: [\underline{y}_m, \overline{y}_m]$ ist sie konstant und streng monoton aufsteigend für $y \in J_m$.

\underline{y}_m ist das Minimum von f auf $\bar{\Omega}$.

\overline{y}_m ist der Inhalt von $\bar{\Omega}$.

Beweis: (I) $f(x)$ nimmt auf dem kompakten Gebiet $\bar{\Omega}$ Maximum und Minimum an: $m < f(x) < M$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Wir haben für $y < m$:

$$\Omega = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \mid y < m < f(x)\} = \Omega_{f,y}$$

und damit

$$E[\bar{\Omega}, f, y] = E[\Omega_{f,y}, f, y] = \text{Inhalt von } \Omega.$$

Sei ein $\delta > 0$ mit $\delta < M - m$ vorgegeben. (Wir nehmen dabei an, dass f auf Ω nicht konstant ist).

Die Menge $\Omega_{f,m} - \Omega_{f,m+\delta} =$

$$= \{x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \mid y < m < f(x)\} - \{x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \mid y < m+\delta < f(x)\}$$

hat, da f eine stetige Funktion ist, offensichtlich einen von 0 verschiedenen Inhalt $\eta = \eta(\delta)$.

Insgesamt haben wir also:

$$E[\bar{\Omega}, f, y] = \begin{aligned} & \text{Inhalt } (\bar{\Omega}) \text{ für } y = m \\ & \text{Inhalt } (\bar{\Omega}) - \eta \text{ für } y = m+\delta, \\ & \eta > 0, \eta = \eta(\delta), \delta > 0, \delta < M-m. \end{aligned}$$

Entsprechend kann für das Maximum von f gezeigt werden:

$$E[\bar{\Omega}, f, y] = \begin{cases} 0 & \text{für } y > M \\ \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tilde{\delta}) > 0 & \text{für } y = M-\tilde{\delta} \\ & \tilde{\delta} < M-m \end{cases}$$

(II) Den zweiten Teil der Aussage erhalten wir durch einen analogen Schluss, indem wir die Funktion $E[\bar{\Omega}, -f, -y]$ betrachten.

Korollar 6.2.1 : Konvergieren die Funktionen $E_\varepsilon[\bar{\Omega}, f, y]$ und $E_\varepsilon[\bar{\Omega}, -f, -y]$ für $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ gleichmäßig für $y \in \mathbb{R}$ gegen die Grenzfunktionen $E[\bar{\Omega}, f, y]$ bzw. $E[\bar{\Omega}, -f, -y]$, so gilt für das Maximum M und das Minimum m von f auf $\bar{\Omega}$:

Es sei $a < m < f(x) < M < b$ für alle $x \in \bar{\Omega}$.

Fall a_1 : Es existiert ein $x \in \Omega$, so dass $f(x)$ positiv ist:

$$M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon' > 0}} \int_0^b \sigma_\varepsilon(E_{\varepsilon'}[\bar{\Omega}, f, y]) dy$$

Fall a_2 : Es existiert kein $x \in \Omega$, so dass $f(x)$ positiv ist:

$$M = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0 \quad \varepsilon' > 0}} \int_0^a (1 - \sigma_\varepsilon(E_\varepsilon[\bar{\Omega}, f, y])) dy$$

Fall b_1 : Es existiert ein $x \in \Omega$, so dass $-f(x)$ positiv ist:

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0 \quad \varepsilon' > 0}} \int_0^b \sigma_\varepsilon(E_\varepsilon[\bar{\Omega}, -f, y]) dy$$

Fall b_2 : Es existiert kein $x \in \Omega$, so dass $-f(x)$ positiv ist:

$$m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0 \quad \varepsilon' > 0}} \int_0^a (1 - \sigma_\varepsilon(E_\varepsilon[\bar{\Omega}, -f, y])) dy$$

7. Anwendungen und Beispiele

Innerhalb dieses letzten Paragraphen der vorliegenden Arbeit behandeln wir numerische Verfahren bei der Anwendung unserer Residuensätze.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf die beiden folgenden Integrationskerne:

$$(7.1) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{(x-t)^2}{\varepsilon}} \quad \text{und}$$

$$(7.2) \quad \frac{1}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-t)^2}$$

Für jedes positive, endliche ε erhalten wir aus (7.1) und (7.2) Näherungsformeln zur Bestimmung der Anzahl und der Summe der Nullstellen einer reellen differenzierbaren Funktion.

Sei nun $f(x)$ eine explizite vorgegebene, nicht-konstante, differenzierbare Funktion, deren Nullstellen nicht zugleich relative Maxima oder Minima sind und im Intervall (a, b) liegen, so gilt:

Die Summe

$$(7.3) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left\{ \sum_{v=0}^N \left(\int_a^b \left(\frac{-f^2(x)}{\varepsilon} \right)^v \frac{|f'(x)|}{v!} dx \right) \right\}$$

strebt für $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gegen eine ganze Zahl M .

M ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall (a, b) .

Ist $M \neq 0$ so gilt weiter:

Die Summe

$$(7.4) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left\{ \sum_{v=0}^N \left(\int_a^b x \left(\frac{-f^2(x)}{\varepsilon} \right)^v \cdot \frac{|f'(x)|}{v!} dx \right) \right\}$$

strebt für $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ und $N \rightarrow \infty$ gegen die Summe der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall (a, b) .

In ganz analoger Weise gilt:

Das Integral

$$(7.5) \quad \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon \cdot |f'(x)|}{\varepsilon^2 + f^2(x)} dx$$

strebt für $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ gegen eine ganze Zahl M .

M ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall (a, b) .

Ist $M \neq 0$ so gilt weiter:

Das Integral

$$(7.6) \quad \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\varepsilon \cdot x \cdot |f'(x)|}{\varepsilon^2 + f^2(x)} dx$$

strebt für $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$ gegen die Summe der Nullstellen von $f(x)$ im Intervall (a, b) .

Näherungsformeln können wir nun aus 7.3 - 7.6 einfach dadurch gewinnen, indem wir einen "möglichst kleinen" festen Wert geben und N (bei 7.3 und 7.4) als feste aber "hinreichend große" Zahl wählen.

Anwendung auf Polynome :

Nach dem Vietaschen Satz erhalten wir für ein Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ das nur reelle Nullstellen besitzt, folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left\{ \sum_{v=0}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{-f^2(x)}{\varepsilon^v} \right)^v \cdot \frac{|f'(x)|}{|v|} dx \right) \right\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \cdot |f'(x)|}{\varepsilon^2 + f^2(x)} dx \approx n \quad \text{für } 0 < \varepsilon \ll 1, N \gg 1.$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \left\{ \sum_{v=0}^N \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{-f^2(x)}{v} \right)^v \cdot \frac{|f'(x)|}{v!} dx \right) \right\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \cdot x \cdot |f'(x)|}{\varepsilon^2 + f^2(x)} dx \approx -a_1 \quad \text{für } 0 < \varepsilon \ll 1, N > 1.$$

Abschließend wollen wir noch einen Vergleich allgemeiner Art zwischen integralen und iterativen Methoden bei der Gleichungsauflösung anstellen.

Zusammen mit der Cauchyschen Integralformel stellt die in dieser Arbeit dargestellte Lösungsmethode eine Alternative zur Iteration, wie wir sie etwa in der Newtonschen Näherungsformel, bzw. der sogenannten "Regula falsi" oder der Picardschen Lösungsmethode für Differentialgleichungen kennen, dar. Nun mag diese Behauptung nicht ohne eine gewisse Problematik sein. So können wir über Hermann Weyl (9.11. 1885 - 9.12. 1955) lesen¹: "Für Weyl wurde (er folgte hier weitgehend Brouwer und Poincaré) die Ur-Intuition des Iterierens zum letzten Fundament mathematischen Denkens ...". Ohne dieses Urteil über einen der bedeutendsten Mathematiker unserer Zeit weiter zu analysieren, wollen wir es zunächst nur zur Kenntnis nehmen. Vielleicht mag es das zweckmäßigste sein, das Charakteristische der einzelnen Methoden, wie es in der graphischen Darstellung zutage tritt, nebeneinander zu stellen.

Wir wollen dazu rein heuristisch - intuitiv vorgehen:

Sei $f(x)$ eine reelle, explizite vorgegebene und stetige Funktion einer reellen Variablen x . Um eine Lösung x^* der Gleichung $f(x) = x$ auf iterativem Wege zu ermitteln haben wir mit einem "geeignet gewählten" Wert x_1 als "falschem Ansatz" zu beginnen:

¹ Meschkowski, Herbert: Mathematiker-Lexikon, BJ-Hochschul-taschenbuch 414/414 a*, Mannheim 1964, S. 269.

$$f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots, f(x_v) = x_{v+1}.$$

Ist $f(x)$ differenzierbar und gilt $|f'(x)| < \rho < 1$ innerhalb des zu untersuchenden Intervalls (a, b) , in dem eine Lösung existiert, so konvergiert das Verfahren: Ist nämlich x^* eine Lösung obiger Gleichung: $f(x^*) = x^*$, so haben wir

$$|x_2 - x^*| = |f(x_1) - f(x^*)| = |f'(v)(x_1 - x^*)| < \rho |x_1 - x^*|$$

mit $x_1 < v < x^*$ also:

$$|x_n - x^*| < \rho^n |x_1 - x^*| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Ohne diese spezielle Konvergenzbedingung kann nun weiter das Verfahren divergieren oder aber es tritt ein Zyklus auf:

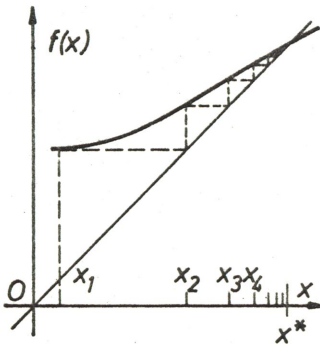


Abb. 1
Fall 1: Konvergenz

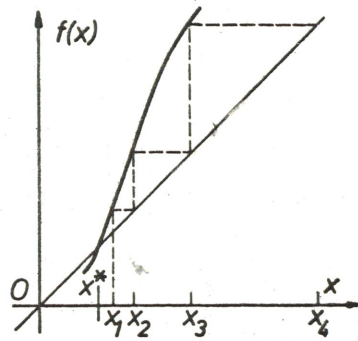


Abb. 2
Fall 2: Divergenz

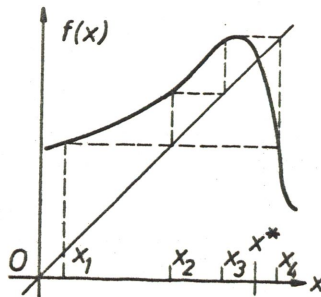


Abb. 3
Fall 3: Zyklus

Übertragen wir nun unser Problem ins Komplexe, so bietet sich bei der Cauchyschen Methode ein wesentlich einfacheres Bild. Es ist in jedem Fall durch eine geschlossene Kurve, die als Integrationsweg dient, gekennzeichnet.

Sei etwa $p(z)$ eine auf einem Gebiet G der komplexen Zahlenebene holomorphe, d.h. komplex differenzierbare Funktion. Befindet sich in einem Bereich $B \subset G$ eine einfache Nullstelle z^* , so ist diese gleich dem Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{p'(z)}{p(z)} dz .$$

Dabei bezeichnet γ eine ganz in B verlaufende geschlossene Kurve. Im einfachsten Fall ist dies ein Kreis mit der Darstellung: $\gamma(t) = b + r \cdot e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, $b \in B$, $r \in \mathbb{R}^+$.

$$z^* = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (b + re^{i\varphi}) \frac{p'(b + re^{i\varphi})}{p(b + re^{i\varphi})} re^{i\varphi} d\varphi.$$

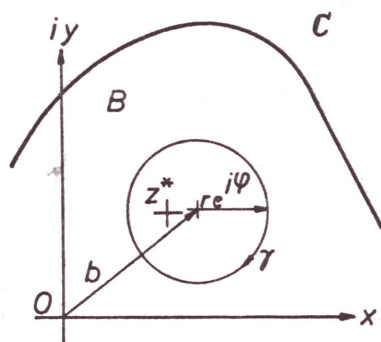


Abb. 4

Bei der Ermittlung einer Nullstelle einer reellen differenzierbaren Funktion $q(x)$ nach unserem Verfahren handelt es sich schließlich ebenfalls um eine einfache Integration, jedoch nicht um eine geschlossene Kurve sondern über ein einfaches Intervall $J = (a, b)$ in dem sich die Nullstelle x^* befindet.

Bezeichnet $\delta(x)$ die δ -Funktion, so haben wir

$$x^* = \int_a^b x \delta(q(x)) |q'(x)| dx.$$

In der graphischen Darstellung ist die Integration der δ -Funktion über das transformierte Intervall $q(J)$ angedeutet:

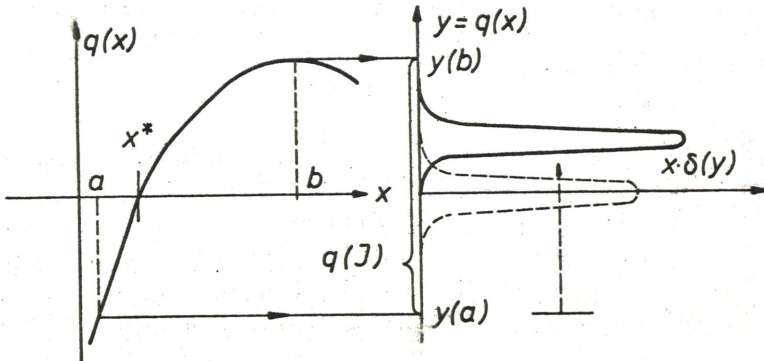


Abb. 5

Die δ -Funktion ist hier zur Veranschaulichung durch eine Glockenkurve mit endlicher Halbwertsbreite ersetzt.

Bibliographie

- (1) Brouwer, L.E.J. : Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71, (1912), S. 97 - 115
- (2) Donoghue, W.F. : Distributions and Fourier transforms. New York 1969
- (3) Friedmann, A. : Generalized Functions and Partial Differential Equations. Englewood Cliffs, New Jersey 1963
- (4) Gelfand, J.M. and Schilow, G.E. : Verallgemeinerte Funktionen.
- (5) Goffmann, C. and Pedrick, G. : A first Course in Functional Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey 1965
- (6) Halperin, J. : Introduction to the theory of distributions. Toronto 1968, (Canadian Mathematical Congress: Lecture series Nr. 1).
- (7) Heinz, E. : An Elementary Analytic Theory of Degree of Mapping in n-dimensional Space. Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 8, Nr. 2, March 1959, S. 231-248.
- (8) Hervé, M. : Cours sur les Distributions. Paris 1970
- (9) Hörmander, L. : Linear Partial Differential Operators. Berlin 1963
- (10) Lighthill, M.J. : Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen. (Deutsche Übers. v. Introduction to Fourier analysis and generalised functions). Mannheim 1966
- (11) Marchand, J.P. : Distributions, Amsterdam 1962
- (12) Mikusinski, J. und Sikorski, R. : The elementary theory of distributions. (Rozprawy matematyczne 12.25) Warszawa 1957 - 1961.
- (13) Nagumo, M. : A Theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis. Americal Journal of Mathematics 73, 1951, S. 485 - 496
- (14) Nagumo, M. : Degree of mapping in convex linear topological spaces. Americal Journal of Mathematics 73, 1951, S. 497 - 51 .

- (15) Schwartz, L. : Théorie des distributions.
Paris 1966
- (16) Treves, F. : Linear Partial Differential Operators
with Constant Coefficients.
New York 1966
- (17) Treves, F. : Topological vector spaces, distributions
and kernels. New York 1967
- (18) Walter, W. : Einführung in die Theorie der Distri-
butionen. (B.J. - Hochschulschriften
754/754 a) Mannheim 1970
- (19) Yosida, K. : Functional Analysis
New York 1965
- (20) Zemanian, A.H. : Distribution theory and transform ana-
lysis. New York 1965.

E R R A T A

S 28, 3. Zeile, soll heißen: ... ist gleich folgendem Integral

S 33, letzte Zeile, soll heißen: ... hat genau einen einfachen Pol in G_C

S 35, letzte Formel, richtig:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \tau_\varepsilon(f, x^* - \delta, x^* + \delta) = \pm 1.$$

S 37, vorletzte Formel, richtig:

$$\text{chr}(\Omega_1 \cup \Omega_2, x) = \text{chr}(\Omega_1, x) + \text{chr}(\Omega_2, x) - \text{chr}(\Omega_1, x) \text{chr}(\Omega_2, x)$$

S 40, 3. Zeile von unten, soll heißen:

Weg $C_1 \in [C]$, $0 < l < M$, liegt, mit minimalem l

S 41, 3. Zeile von unten, richtig:

$$(B) \text{ Sei } [\Omega] = \{\Omega_r \subset \Omega, r \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)\}$$

letzte Zeile unten, richtig:

$\Omega_0 \subset \dots \subset \Omega_r \subset \dots \subset \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:

S 43, Erste Formel, richtig:

$$x^* = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\Omega_{L(M)+\delta}} x K_\varepsilon(f(x)) |J[f(x)]| dx$$

S 45, 3. Zeile von unten, richtig:

$$\dots p(x^*) = 0 \stackrel{!}{=} P(x^{*2}) = 0$$

S 54, Formel über der Zeichnung, richtig:

$$z^* = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (b+re^{i\varphi}) \frac{p'(b+re^{i\varphi})}{p(b+re^{i\varphi})} ire^{i\varphi} d\varphi$$

