

ZUR GESCHICHTE GEOMETRISCHER NÄHERUNGSKONSTRUKTIONEN

FÜR DIE ERMITTLUNG DER ZAHL π ⁺)

von

WILLI VOGLER ⁺⁺⁾INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung	150
Abstract	150
1. Die Quadratur des Kreises ist mit Zirkel und Lineal nicht lösbar	151
2. Vorgeschichte	151
3. Rektifikationen und Approximationen (Näherungslösungen)	153
4. Vergebliche Versuche zur Lösung der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal	156
5. Eigene Näherungskonstruktionen des Verfassers	157
6. Schlußfolgerungen	161
7. Darstellung von π im Koordinatensystem	163
Konstruktionen und Erläuterungen (Graphiken)	164
Anhang (Lehrsätze und math. Zeichen)	184
Erläuterungen zum Anhang	186
Literaturverzeichnis	188

⁺) $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ ..$

⁺⁺⁾ Willi Vogler, Hutmachergasse 11, 84111 Beratzhausen

ZUSAMMENFASSUNG

Keine Zahl hat während der letzten Jahrtausende eine derartige Faszination auf viele Menschen - geniale Mathematiker, Freunde der Mathematik und auch Laien - ausgeübt, wie jene Größe, die das Verhältnis zwischen Kreisdurchmesser und Kreisumfang ausdrückt. Ihre Bezeichnung mit dem griechischen Buchstaben π geht auf den bedeutenden Mathematiker Leonhard E u l e r zurück, der sie seit 1737 in seinen umfangreichen Schriften anwandte.

Schon im vorchristlichen Jahrtausend war man bemüht, einen möglichst genauen Wert zu ermitteln, doch erst seit dem 16. Jahrhundert gelang es, durch verschiedenartige Reihen, insbes. mit arcsin- und arctan-Werten, eine hohe Anzahl von richtigen Dezimalstellen von π zu erreichen.

In dieser Abhandlung soll jedoch nicht die rechenmäßige Erfassung gewürdigt werden, sondern der Verfasser möchte in kurzer Form zeigen, wie man versuchte, dem Problem der Kreismessung in elementar-geometrischer Weise durch Näherungskonstruktionen und Rektifikationen zu begegnen.

Abschließend sollen erstmals öffentlich vom Verfasser in Jahrzehnten selbst erarbeitete ungewöhnliche Approximationen mit bisher nicht gekannter Genauigkeit vorgetragen werden.

ABSTRACT

There is no number which has fascinated so many people - ingenious mathematicians as well as friends of mathematics and also uninitiated persons - during the last thousands of years, than the number, that expresses the proportion between the diameter and the circumference. Since 1737 it is marked by the German mathematician Leonhard E u l e r with the Greek letter π . Already in the millennium before Christ people were striving hard for finding a nearly exact value, but first in the 16. century a high quantity of decimal numbers were found by differently infinite lines especially with arcsin- and arctan-values.

But in this publication arithmetical problems will be neglected. The author intends to show in a short manner the experiments of solving the problem of measuring the circle by elementarily geometrical manners in form of approximations. At last the author will publish for the first time some unusual approximations that he has find out in the last decades.

1. DIE QUADRATUR DES KREISES IST MIT ZIRKEL UND LINEAL NICHT LÖSBAR

Wenn in öffentlichen Reden oder von Autoren gelegentlich von der "Quadratur des Kreises" gesprochen wird - auch der erste deutsche Kanzler Bismarck soll im Reichstag wiederholt diesen Ausdruck gewählt haben -, um symbolisch mit besonderem Nachdruck auf *unmöglich Erreichbares* hinzuweisen, wird nicht jedem Zuhörer oder Leser geläufig sein, welche mühevollen Anstrengungen berühmte Mathematiker und auch Laien im Verlauf von fast 3000 Jahren unternahmen, um dieses klassische - mitunter als so einfach empfundene - Problem zu lösen. Es galt und ist auch heute noch von Bedeutung für Näherungskonstruktionen, den Inhalt eines gegebenen Kreises in ein flächengleiches bzw. *annähernd* gleich großes Quadrat zu verwandeln, oder eine Kreislinie in eine gerade Strecke (*annähernd*) gleicher Länge zu formen, d.h. zu rektifizieren. Für die klassische Lösung sind als Hilfsmittel *nur Zirkel und Lineal* (selbstverständlich ohne Maßeinteilung) zugelassen.

Zwar ahnten und erkannten bedeutende Wissenschaftler der letzten Jahrhunderte bereits die Unmöglichkeit der Quadratur wegen der von ihnen festgestellten Irrationalität der Zahl π , doch erst Professor Lindemann von der Universität München gelang im Jahre 1882 der sogenannte Transzendenz-Beweis.

Die Suche nach Lösungen, bzw. die Bemühungen um die Kreismessung generell, hatten allerdings im Laufe der Jahrtausende sehr wesentlich zum Ausbau der Mathematik beigetragen. Außerdem wurde eine große Anzahl von *Näherungskonstruktionen* gefunden - sei es durch Zufall, Probieren oder nach wissenschaftlichen Überlegungen - von denen eine Auswahl mit beachtlichen "Genauigkeitswerten" zunächst in Abschnitt 3 vorgeführt wird.

Es wird vorausgesetzt, daß der Mehrzahl der Leser die Grundbegriffe der Elementar-Geometrie und die allgemein verwendeten mathematischen Zeichen bekannt sind. Um jedoch auch bei vielseitig interessierten Lesern und Freunden der Mathematik das Verständnis für die wundersamen Zusammenhänge von Strecken und Winkeln im Kreis zu wecken bzw. die Auffrischung von erworbenen Schulkenntnissen zu erleichtern, sind im Anhang ausführliche Erläuterungen zu finden.

2. VORGESCHICHTE

In einer nach chronologischen Gesichtspunkten ausgerichteten Abhandlung können zu Beginn die ältesten überlieferten Werte zur Kreismessung nicht unbeachtet gelassen werden, selbst dann nicht, wenn es sich höchstwahrscheinlich eher um Schätzungen als um Messungen oder gar um mathematische Erkenntnisse gehandelt haben muß.

Nach dem ältesten ägyptischen Lehrbuch (etwa um 1700 v. Chr.) sollen $8/9$ des Kreisdurchmessers die Quadratseite ergeben (π wäre ungefähr $(16/9)^2 = 3,16049\dots$). In der Bibel ist bei der Beschreibung des Salomonischen Tempelbaues (966 - 955 v. Chr.) der unzulängliche babylonische Wert 3 aufgeführt (1. Kön. 7,23 und 2. Chron. 4,2: "Dann machte er das 'Meer'. Es wurde aus Bronze gegossen und maß zehn Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen konnte es rings umspannen").

Unter den ältesten Indern stellte der Verfasser eines Priester-Handbuchs (etwa im 6. Jahrhundert v. Chr.) für π einen Wert von ungefähr 3,088.. auf. *Anaxagoras* (etwa um 500 v. Chr.), einer der griechischen Mathematiker, soll sich, als er - wegen Gottlosigkeit angeklagt - im Gefängnis saß, als *erster* mit der "Quadratur des Kreises" beschäftigt haben; Einzelheiten sind jedoch nicht bekannt. *Antiphon*, griechischer Mathematiker und Philosoph (um 450 v. Chr.), sah eine Möglichkeit zur geometrischen Lösung darin, daß er einem Kreis (ausgehend vom einbeschriebenen Quadrat) regelmäßige Vielecke mit sich stets verdoppelnden Seitenzahlen einbeschrieb, bis das Vieleck dem Kreis gleichkam. Durch Umwandlung dieses zuletzt erhaltenen Vielecks in ein Quadrat, glaubte er, die Quadratur gelöst zu haben, obwohl es sich nur um eine Näherungslösung handeln konnte. Sein Zeitgenosse *Bryson* von Heraklās erweiterte Antiphons Überlegungen durch Einbeziehung der umbeschriebenen Vielecke; er unterlag dem Irrtum, daß der Kreisinhalt dem arithmetrischen Mittel der ein- und umbeschriebenen Quadrate gleichzusetzen sei.

Erst *Archimedes* (287 - 212 v. Chr.), einer der bedeutendsten griechischen Mathematiker, zu denen u.a. auch *Euklid* zählte, erzielte bahnbrechende Erfolge im Bemühen um die Berechnung des Kreisumfangs. Seine Ergebnisse fanden über Jahrhunderte hinaus volle Anerkennung in vielen Ländern der Erde und sind als Wegweisung für spätere Überlegungen anzusehen. Er ging davon aus - auch weniger in der Mathematik Bewanderte werden heutzutage den Weg nachempfinden bzw. die Richtigkeit überprüfen können -, daß die Umfänge der dem Kreis einbeschriebenen und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecke mit zunehmender Seitenzahl sich immer deutlicher dem Kreisumfang nähern.

Die überragende Leistung dieses genialen Mathematikers verdient deswegen besondere Beachtung, weil zu seiner Zeit die bequemen Rechenvorgänge mit den heutzutage verwendeten arabischen Zahlen (von den Indern übernommen) im Dezimalsystem fehlten und schon einfache Rechenoperationen erhebliche Mühe forderten, ganz zu schweigen von der Erlangung von Wurzelergbnissen, die wahrscheinlich nur im Annäherungsverfahren ermittelt werden konnten. Seine Näherungswerte zwischen $3\ 10/71$ und $3\ 1/7$ waren über Jahrhunderte hinaus für Berechnungen des Kreisumfangs von ausschlaggebender Bedeutung.

Mit einer wesentlich bequemeren Formel errechnete der indische Astronom *Aryabhatta* (geb. 476 n. Chr.) aus dem einbeschriebenen 384-eck (ausgehend vom einbeschriebenen Sechseck)

$$\text{die Näherungswerte } \frac{3927}{1250} = \frac{31\ 416}{10\ 000} = 3,1416\dots$$

Bevor in dieser Abhandlung auf das eigentliche Thema, die Aufzeichnung von Rektifikationen und Approximationen eingegangen wird, erscheint noch ein Hinweis auf die sogenannten *Möndchen des Hippokrates* von Kos wertvoll zu sein. Schon im Altertum wurde erkannt und bewiesen, daß nicht nur die Summe der *Quadrate* über den Katheten dem Hypothenusenquadrat gleichzusetzen sind (Pythagoras), sondern daß auch andere Gebilde, die einander ähnlich sind, zu gleichen Ergebnissen führen. Betrachtet man zunächst Abb. 1, so erweist es sich ohne jeglichen Zweifel als richtig, daß der Inhalt der über den Katheten errichteten rechtwinkligen Dreiecke dem rechtwinkligen Dreieck über der Hypothenuse gleichzusetzen ist. Alle 3 Dreiecke (gespiegelt) sind einander ähnlich; denn sämtliche 3 Winkel der einzelnen Dreiecke sind einander gleich. Das schraffierte Dreieck liefert den eindeutigen Beweis; bekanntlich besagt der Satz des Thales, daß die Höhe das rechtwinklige Dreieck in 2 Teildreiecke, die untereinander und dem Ausgangsdreieck ähnlich sind, zerlegt.

Errichtet man nun über den Katheten je einen Halbkreis, so stimmt der Inhalt dieser beiden Halbkreise exakt mit dem über der Hypothenuse errichteten überein (Abb. 2). Je ein Katheten-Halbkreis besteht aus je einem Möndchen und je einem Segment (Kreisabschnitt). Der Hypothenusen-Halbkreis beinhaltet das rechtwinklige Dreieck und die beiden Katheten-Segmente. Folglich stimmt der Inhalt des Dreiecks mit dem der beiden 'Möndchen' exakt überein. In der Tat war es somit gelungen, allseitig krummlinig begrenzte Flächen einem mit rationalen Zahlen berechenbaren Dreieck gleichzusetzen, also können die beiden Möndchen (zusammen! - darin liegt der Trick -) auch nur rationalen Flächeninhalt aufweisen. Jedenfalls gaben diese "Möndchen" den Mathematikern Griechenlands (so Egmont Colerus Lit. V. Nr. 2) viel zu denken.

3. REKTIFIKATIONEN UND APPROXIMATIONEN

Eine Reihe von Näherungskonstruktionen entwarf der deutsche Kardinal von Cusa (Cusanus, 1401 - 1461), von denen die genaueste und zugleich älteste Näherungskonstruktion einer Kreisbogenrektifikation hervorzuheben ist (Abb. 3a). Je kleiner der Winkel wird, desto mehr wächst die Genauigkeit. Sobald der Winkel aber über 30° hinausgeht, leidet die Genauigkeit des errechneten Wertes erheblich (s. Anmerkungen zu Abb. 3).

(Der volle Umfang des Kreises ließe sich, nach Auffassung des Verfassers dieser Abhandlung, nur dann rektifizieren, wenn von einem ohne Winkelmesser konstruierfähigen Winkel (z.B. 60° , 45° oder dergl.) ausgehend, eine wiederholte Teilung des Winkels bzw. des Kreisbogens und anschließend eine wiederholte Verdoppelung der jeweils erhaltenen Strecke vorgenommen würde. Dem unbewaffnetem Auge wären jedoch Grenzen gesetzt (s. Anm. zu Abb. 3); außerdem würde sich der Aufwand für die mehrmalige Winkelteilung und die anschließende mehrmalige Streckenverdoppelung im Verhältnis zu der nur begrenzt erreichbaren Zahl von richtigen Dezimalstellen kaum lohnen - bei einem Radius von etwa 1 dm ("etwa", weil eine Messung mit dem Lineal mit *Maßeinteilung nicht erlaubt* ist) könnten höchstens 6 bis 7 richtige Dezimalstellen erlangt werden. Die hohe Leistung dieses genialen Mannes soll jedoch durch diese Überlegungen keineswegs abgewertet werden!)

Eine an die Cusanus-Konstruktion angelehnte Näherungsmethode fand *Snellius*, Prof. d. Math. u. Phys. an der holl. Uni. Leyden, 1580 - 1626 (s. Abb. 4). Während die Formel von Cusanus einen unteren Wert für π liefert, erreicht die des *Snellius* jeweils einen oberen, so daß der Mittelwert (bei jeweils gleichem Winkel) dem richtigen wesentlich näher kommt. Die unterste Grenze für die Zeichengenauigkeit (s. Anm. zu Abb. 4) ist auch hier sehr eingeschränkt; gleichsam würde sich die Rektifikation des Vollkreises (wie bei Cusanus) kaum lohnen, so daß in dieser Abhandlung im wesentlichen nur die Formel aufgeführt ist. Interessierte Leser mögen hinsichtlich der Entwicklung der Formel auf die Schrift von *BEUTEL* (1933) zurückgreifen.

Weltruf erlangte die älteste Approximation des polnischen Jesuitenpater's *Adam Kochansky* (1685) (bei *E. Beutel* auch als Mathematiker des Königs von Polen bezeichnet). Der besondere Vorteil seiner Konstruktion besteht in der Einfachheit; sie kann mit einer Zirkellänge verwirklicht werden (Abb. 5). In Fachbüchern konnte der Verfasser dieser Abhandlung lediglich eine Abbildung gemäß der unter Nr. 5 wiedergegebenen finden. Der 30° -Winkel könnte jedoch in Verbindung mit der Errichtung der Mittelsenkrechten (durch Abtragung des Radius im oberen Halbkreis) gebildet werden. (Wegen Errichtung der Mittelsenkrechten mit Hilfe von r wird auf den Anhang (1 b) verwiesen).

Zu 6 richtigen Dezimalstellen von π führt die von dem holl. Math. Prof. *Jakob de Gelder* (1765 - 1848) gefundene Konstruktion (Abb. 6). Den sich errechnenden bzw. zugrundegelegten Näherungswert soll *Adrian Metius* (1527 - 1607) gefunden haben; er könnte aber bereits vor *Metius* vom deutschen Mathematiker *Valentius Otho* (1550 - 1605) aufgestellt worden sein und findet sich sogar schon unter Aufzeichnungen des Chinesen *Tsu-Chungchih*, 5. Jh. (*BEUTEL* 1933). Die Formel ist aus den Anmerkungen zu Abb. 6 zu ersehen.

Einen etwas genaueren Wert als die Konstruktionen bzw. Formeln von Cusanus und Snellius (bei entsprechend gleichen Winkeln) ergibt die Konstruktion von *Lambert* (Oberbaurat in Berlin, 1728 - 1777); seine Rektifikation stützt sich auf eine Formel vom berühmt gewordenen Mathematiker und Physiker *Isaac Newton* (1643 - 1727). Die ausführliche Entwicklung der Formel können interessierte Leser bei BEUTEL (1933) nachlesen. Die Konstruktion entspricht nahezu der von Cusanus, nur mit dem Unterschied, daß der 3-fache Radius um $1/5$ der Strecke AE (s. Abb. 7) gekürzt wird. Dem unbewaffneten Auge sind jedoch auch hier Grenzen gesetzt, so daß bei einem Radius von ungefähr einem Dezimeter die Zeichenmöglichkeit bei einem Winkel von etwa 10° endet. Der Winkel könnte zwar noch des öfteren geteilt werden, aber der Teilung der Strecke AE sind Grenzen gesetzt!

Beachtung verdient auch die von *Fontana* (1784) geschaffene Konstruktion (Abb. 8). Sie liefert π bei einem Radius von ungefähr 1 dm auf etwa 8 Dezimalstellen genau. Darüber hinaus wären jedoch dem Zeichner (unter Verwendung eines Radius der angegebenen -ungefähren- Größe) Grenzen gesetzt, weil mit unbewaffnetem Auge kleine Strecken nur in beschränktem Maße wahrgenommen und vom Zirkel übertragen (erfaßt) werden könnten; man muß vor allem die erforderlichen Winkelteilungen und die rechtwinkligen Ansätze in Betracht ziehen.

Eine reiche Anzahl von Näherungskonstruktionen sind, neben sehr vielen Literaturangaben, im Band von SIMON (1906) enthalten, von denen zwei der genauesten (mit jeweils 6 richtigen Dezimalstellen von π) ausgewählt werden.

Abb. 9 zeigt eine Lösung von *Pioche*, Bildhauer zu Metz (vermutlich um die Mitte des vorigen Jahrhunderts lebend - die Angabe von Jahreszahlen fehlt -). Bedenkt man eine Genauigkeit von immerhin 6 richtigen Dezimalstellen (der Fehler beträgt nur etwa 0,0000001), kann die Konstruktion als verhältnismäßig einfach gelten; allerdings ist nicht ersichtlich, wie die erforderlichen Strecken von $4/5$ und $3/8$ r gewonnen werden. Nach den vom Verfasser der vorliegenden Abhandlung selbst entworfenen Konstruktionen in Abschnitt 5 bereiten diese Teilungen jedoch keine besonderen Schwierigkeiten. Die Konstruktion von *Pioche* müßte allerdings wesentlich erweitert werden.

Bemerkenswert ist auch eine 1872 in London preisgekrönte Formel von *Jicenkí*: $\pi \approx 3 + 1/10 (\cos 15^\circ + 0,45)$. Nähere Angaben über den Entdecker fehlen, desgleichen eine Abbildung, so daß der Verfasser in Abb. 10 eine Konstruktion entwarf. Auch hier bleibt die Frage offen, auf welche Weise 0,45 r errichtet wurde. In diesem Zusammenhang muß ebenfalls auf die eigenen Konstruktionen des Verfassers in Abschnitt 5 verwiesen werden, nach denen eine Bildung von $0,45 = 9/20$ r leicht vermöglicht wird. Die Ungenauigkeit beläuft sich nach dieser Formel auf etwa 0,000 000 07.

Aus jüngerer Zeit stammen 2 Näherungskonstruktionen (Abb. 11 und 12), die der MNU Band 5 (1952/53) S. 74 W. SCHOCK und Band 16, Heft 3 C. SIMON (1964) entnommen sind. Trotz der Unterschiede in den Zeichnungen und den angegebenen Formeln, laufen beide auf das gleiche Ziel hinaus. Bei der Ausrechnung der letztgenannten Formel ist lediglich ein Rechenfehler unterlaufen.

4. VERGEBLICHE VERSUCHE ZUR LÖSUNG DER QUADRATUR DES KREISES

Mit der Wiedergabe einer Auswahl von Näherungskonstruktionen, von denen die beiden letzten bis in die heutige Zeit hineinreichen, dürfte Genüge getan sein. Von den Rektifikationen nach Cusanus, Snellius, Lambert und Fontana abgesehen, müssen wohl sämtliche Approximationen (Näherungskonstruktionen) als reine *Zufallslösungen* angesehen werden. Jegliche Versuche, mit einer *begrenzten* Zahl von Operationen die "Quadratur des Kreises" exakt zu lösen, sind nach Prof. Lindemanns Transzendenzbeweis zum Fehlschlag verurteilt.

Bei der Durchsicht der Literatur hat der Verfasser Veröffentlichungen, die bis in die 30er Jahre dieses Jahrhunderts hineinreichen, gefunden, in denen die Autoren mit vollster Überzeugung die Lösung der Quadratur anpreisen. Es soll die für ihre Werke aufgewendete Mühe keinesfalls unterschätzt werden; dennoch muß eine Anerkennung der Ausführungen schon aus einfachen Gründen versagt werden: Die von den Autoren errechneten Werte für π weichen mitunter bereits von der 5. Dezimalstelle an gegenüber dem, auf vielfältigste Weise immer mit den gleichen Zahlen errechneten richtigen Wert ab. Es bleibt sicherlich jedermanns "Privatvergnügen", trotz aller wissenschaftlichen Erkenntnisse, in Unkenntnis des Transzendenzbeweises von Prof. Lindemann oder mit der Absicht, diesen Beweis zu ignorieren, weiterhin nach einer "Endlösung" zu suchen. Wenn aber - wie mehrmals geschehen - für den *Kreisumfang* ein *anderer* Wert als für den *Kreisinhalt* errechnet wird, muß von einer gewissen Unkenntnis mathematischer bzw. geometrischer Gesetzmäßigkeiten gesprochen werden. Daß beide Werte unumstößlich einander gleich sein *müssen*, will der Verfasser in Abb. 13 veranschaulichen.

Jeder klar u. vernünftig denkende Mensch wird - selbst ohne besondere Mathematik-Kenntnisse - zugeben müssen bzw. einsehen, daß sich die Umfänge der regelmäßigen ein- und umbeschriebenen Vielecke mit zunehmender Seitenzahl ständig dem Umfang des Kreises nähern, die Zahl der richtigen Dezimalstellen von π wächst zusehends. Bemißt man die Längen der Seiten, die Umfänge und Inhalte der Vielecke nach Winkelfunktionen, so zeigt sich für Umfang und Inhalt des jeweils in Betracht gezogenen Vielecks unabweislich der gleiche Sinus- bzw. Tangenswert. Ein Beispiel: Der Umfang des umbeschriebenen 12-ecks entspricht 24 mal der halben Seite des Bestimmungsdreiecks. Letztere bildet mit dem Radius (r) einen rechten Winkel.

Der Zentriwinkel des Bestimmungsdreiecks beträgt $360^\circ : 12 = 30^\circ$; der halbe mißt somit 15° . $\tan 15^\circ =$ halbe Vieleckseite : r (im Einheitskreis wird $r = 1$ gesetzt). Der Umfang dieses Vielecks entspricht also 24 mal $(\tan) 15^\circ$. Für die Inhaltsberechnung eines jeden beliebigen Dreiecks gilt: Halbes Produkt aus Grundfläche mal Höhe, oder - es führt zum gleichen Ergebnis - halbe Grundfläche (im vorliegenden Fall = halbe Vieleckseite = $\tan 15^\circ$ mal r (= Höhe). Als Inhalt des unbeschriebenen regelmäßigen 12-ecks setzen wir 12 mal $\tan 15^\circ$. Abgesehen vom Multiplikator (für den Umfang stets doppelt so groß wie für den Inhalt), bleibt der *Tangenswert* beim gleichen Vieleck für Umfang und Inhalt unverändert, gleich, ob ein 12-eck, ein 2^{30} - (= 1 073 741 824-eck) oder jedes beliebige n-eck ($n =$ jede beliebige ganze Zahl) gewählt wird. (Der maßgebende Winkel - α : $2 -$ ergibt sich aus $360^\circ : 2n$).

In gleicher Weise kann eine Winkelfunktion - allerdings mit dem Sinus-Wert - auch für das einbeschriebene Vieleck Anwendung finden (s. Abb. 13).

Die Berechnung von π basierte jedoch nicht allein auf dem Prinzip der Verwendung von Werten regelmäßiger Vielecke mit zunehmenden Seitenzahlen, sondern nach Schaffung der *Infinitiesimalrechnung* (Differential- und Integralrechnung) durch Isaac Newton (1643 - 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) in noch bedeutenderem Maße auf der Verwendung von *unendlichen Reihen*. (Uneingeweihte, aber interessierte Leser finden nähere Ausführungen hierzu in der reichhaltigen Literatur). Einige dieser Reihen stammen von dem wohl größten deutschen Mathematiker C.F. Gauß (1777 - 1855) und von Leonhard Euler (1707 - 1783). Moderne Rechenautomaten haben nach Formeln dieser Art für die Zahl π mehr als 100 000 Dezimalstellen mit stets gleichlautenden Ergebnissen errechnet. (Näheres finden interessierte Leser in den Phys. Blättern, von STRUBECKER (1965). Aus der Vielzahl unendlicher Reihen sei als Beispiel eine einzige herausgegriffen, um uneingeweihten Lesern lediglich einen Einblick in die Gestaltung zu geben oder ihnen die Möglichkeit zu bieten, die Richtigkeit - evtl. unter Zuhilfenahme eines technischen Taschenrechners - zu überprüfen. Die Formel bzw. Reihe lautet: $\pi/4 = 8 \arctan 1/10 - 4 \arctan 1/515 - \arctan 1/239$. Die Formel stammt (nach Beutel) von *Buzengeiger* (1771 - 1835), od. (nach Strubecker) von S. Klingentierna (um 1730).

5. EIGENE NÄHERUNGSKONSTRUKTIONEN DES VERFASSERS

Vor fast genau 50 Jahren begann der Verfasser - als 17-jähriger Schüler - sich gelegentlich dem Entwerfen eigener Näherungskonstruktionen zu widmen. Nach anfänglich unbedeutenden Erfolgen, gelang ihm im Jahre 1940 eine Formel zu finden, aus der sich π mit einer Ungenauigkeit von etwa 0,000 0006 errechnete. Nach mehrmaligen Umformungen ergab sich die in Abb. 14 verhältnismäßig einfach dargestellte Konstruktion. Von einer Veröffent-

Abb. 18 mit den zugehörigen Erläuterungen erbringt übrigens den einwandfreien Beweis dafür, daß die Formel A auf jede beliebige Kathete bzw. Sehne zwischen $\sqrt{2}$ und $2r$ anwendbar ist.

Dem Leser wird bereits aufgefallen sein, daß - von der Ursprungsformel angefangen (Abb. 14) - in sämtlichen Gliedern die Zahl 8 erscheint oder in ihnen verborgen liegt,

$$(0,00125 = \frac{1}{8 \cdot 10^2}),$$

daß der Halbkreis 8mal geteilt werden muß, ebenso der Peripheriewinkel, der aus der betreffenden Kathete und $2r$ gebildet ist. Wer nun glaubt, der "Zauber" mit der Zahl 8 hätte mit Beginn des nächsten Gliedes sein Ende gefunden, der irrt; denn $0,1171875 \cdot 10^{-6}$ (S. Tafel I - unter Abb. 21 -) entspricht

$$\text{dem Bruch } \frac{15}{2 \cdot 8 \cdot 8}$$

Mit diesem Wert erreicht π eine Genauigkeit auf 16(!) Dez.-Stellen; die Differenz beträgt nur noch etwa $1,2 \cdot 10^{-17}$. (wichtig: In jedem Fall sind selbstverständlich $10/8 r$ zu addieren!)

Kritiker könnten jetzt entgegenhalten, diese letzte Strecke sei mit *unbewaffnetem Auge* bei einer Kreisgröße mit einem Radius von ungefähr 1 dm nicht mehr feststellbar oder gar konstruierfähig. Bevor die Antwort hierauf fällt, möchte der Verfasser darauf hinweisen, daß er - mit viel Zeitaufwand und Mühe - jene sonderbare Zahl (die nach 8maliger Umwandlung zur großen Kathete und nach deren Verminderung auf $1/8$ zu π führt) auf mehr als 100 Stellen ausgerechnet hat. In Tafel I (unter Abb. 21) sind 70 dieser Stellen aufgeführt. *Sämtliche Glieder*, aus denen sich diese Zahl zusammensetzt (die z.T. nach langwierigen Überlegungen und Berechnungen gefunden wurden), enthalten *Verbindungen mit der Zahl 8*, auch wenn sie nicht sofort ins Auge fallen. So sind z.B. die Glieder $0,318688\dots$ und $0,955370\dots$ Wurzelverbindungen mit $0,26 = 2,08$ geteilt durch 8 und $1,96 = 3 - (2,08 : 2)$. Man beachte besonders die durch Pfeile gekennzeichnete nahezu symmetrische Anordnung und *vor allen Dingen, mit welcher ungewöhnlich schnellen Schritten* die Reihe konvergiert, d.h. an Genauigkeit zunimmt (mitunter 1000-, sogar 10 000-fach!).

Dadurch ist zu erklären, daß allein die in dieser Tafel I aufgeführten Glieder (weitere sind unterhalb der Tafel II zu finden) nach Umwandlung zu π mit 50 richtigen Dezimalstellen führen. Die "Vergleiche zur Genauigkeit" - sie sind unterhalb der Abb. 25 zu finden - sollen eine ungefähre Vorstellung von dem nahezu nicht mehr faßbaren Ausmaß eines solchen Kreises geben.

Nun zurück zu dem evtl. auftretenden Einwand, Strecken unterhalb des 3. Gliedes der Tafel I könnten mit unbewaffnetem Auge nicht mehr wahrgenommen oder gar konstruiert werden: Dieser Einwand wäre durchaus berechtigt, wenn es dem Verfasser nicht durch einen "Trick" gelungen wäre, auch die winzigsten Glieder noch zu erfassen, indem er nämlich, entgegen der Regel, "das Pferd von hinten her aufzäumt"!

Vorweggenommen sei, daß sämtliche Glieder in klar erkennbarer Form und in einer sinnvollen Weise *konstruiert* werden können (s. Abb. 22 und 23).

Abbildung 24 und die gesondert aufgeführten Berechnungen und Erläuterungen (Tafel II) beweisen, in welcher verhältnismäßig einfachen Weise allein mit den ersten *fünf* Gliedern (der Tafel I) π auf 20 Dezimalstellen *konstruiert* werden kann. Dieser Kreis - auf den vollen Millimeter genau - nähme bereits einen Umfang von ungefähr 33,2 Lichtjahren (!) an.

Als Notwendigkeit ergibt sich zwar eine Streckenverkleinerung, die jedoch nach Abb. 19 vollzogen, keinen besonderen Aufwand erfordert (s. auch Erläuterungen zur Abb.), zumal er im Vergleich zu dem erzielten Ergebnis kaum ins Gewicht fällt.

Damit dem Leser nicht die Übersicht verloren geht, zeigt Tafel III lediglich die Operationsgänge auf, die für eine Konstruktion von π mit 45 richtigen Dezimalstellen erforderlich wären. Es ist im übrigen jedem freigestellt, beliebig viele Glieder einzubeziehen, wenn er eine Konstruktion nachvollziehen will. Es könnte sich hierbei auch die Notwendigkeit einer Quadratteilung durch 10 (oder deren Umkehrung) ergeben; hierüber gibt ebenfalls Abb. 19 nebst Erläuterungen Auskunft. In diesem Zusammenhang wird nochmals auf weitere Glieder außerhalb der in Tafel I aufgeführten hingewiesen; Abb. 25 zeigt Wege für ihre Konstruktion. Bemerkenswert ist, daß auch diese Glieder Verbindungen zur Zahl 8 enthalten.

Besonders wird betont, daß aus drucktechnischen Gründen und zur besseren Übersicht die einzelnen Konstruktionsvorgänge an Abbildungen verschiedener Größenordnungen veranschaulicht worden sind. Selbstverständlich lassen sich *sämtliche* Operationen an *einem* Einheitskreis beliebiger Größe durchführen.

Bevor Schlußfolgerungen gezogen werden, möchte der Verfasser noch auf selbst entworfene vereinfachte Näherungskonstruktionen aufmerksam machen. Abb. 15 zeigt, wie die ursprüngliche Form nach Abb. 14 mit *einer* Zirkelöffnung erreicht werden kann. Ferner ergibt sich eine Vereinfachung zum Erhalt der großen Kathete (von der $1/8$ benötigt wird), indem die kleinere (mit ungefähr 0,0119..r) auf verkürztem Wege konstruiert werden kann.

In Abb. 20, Abb. 20 a und der Beschreibung 20 b werden solche Möglichkeiten gezeigt. Diese Konstruktionen stehen zwar nicht in direktem Zusammenhang mit den vorausgegangenen Entdeckungen,

sondern müssen mehr als begrenzte Zufallslösungen angesehen werden, jedoch ist eine gewisse Verwandtschaft nicht abzusprechen. Die Approximation nach 20 b formt immerhin einen Kreis in der Größe von etwa $\frac{4}{5}$ des Erdäquators auf den vollen Millimeter genau.

Um übrigens von vornherein einem eventuellen Einwand zu begegnen, bei verhältnismäßig kleinen Zeichnungen wäre es unmöglich, exakt eine Parallele zur *kleinen* Kathete zu ziehen, um $\frac{1}{8}$ der großen zu erhalten, möge der folgende Hinweis dienlich sein: Entscheidend ist, daß die Teilungslinie, die durch die Begrenzung von $r/4$ bzw. $d/8$ führen muß, *lotrecht* bzw. rechtwinklig auf der *großen* Kathete steht. Da für diesen Vorgang eine gut erkennbare, größere Zirkelspanne Verwendung finden kann, sind Bedenken gegen eine korrekte Teilung unangebracht.

6. SCHLUSSFOLGERUNGEN

Man mag geteilter Ansicht darüber sein, welche Bedeutung Konstruktionen zukommt, die zu Kreisen mit nahezu unvorstellbaren Ausmaßen führen. Für die praktische Anwendung sind weder Rektifikationen noch Approximationen von Wert. Kein Ingenieur oder Techniker wird für den zeichnerischen Entwurf zur Herstellung eines beliebigen, exakt runden Teiles auf eine Näherungskonstruktion zurückgreifen; die erforderlichen Maße können - je nach notwendiger Genauigkeit - mit beliebig vielen Dezimalstellen von π errechnet werden. Abgesehen von der unnötigen Mühe, wäre selbst bei Verwendung der einfachsten Approximation die in der Technik erforderliche Genauigkeit sehr in Frage gestellt. Der Mensch ist unfähig, mit unbewaffnetem Auge eine Zeichnung zu fertigen, die auf eine größere Anzahl von Dezimalstellen eines Millimeters genau wäre. Schon die geringste Unebenheit beim Papier, bei der Auflage oder die unkorrekte (mit unbewaffnetem Auge garnicht korrekt wahrnehmbare) Aufsetzung des Zirkels und dergleichen mehr, führen zu Ungenauigkeiten. Es gibt aus geometrischer Sicht auch keine gezogene *Linie*; in jedem Fall wird eine Fläche, ja sogar ein Körper gebildet. Das beste Beispiel hierfür gibt die Korrektur einer Zeichnung auf Transparentpapier durch Radieren mit einer Rasierklinge oder dergleichen: Es wird verkrustete Tusche, also eine Körpermasse freigesetzt. Genauigkeit kann in der Geometrie nur im euklid'schen Sinne gesehen werden.

Es gibt in der Mathematik unzählige Probleme, nach deren Lösung geforscht wurde und wird, die für eine praktische Anwendung durchaus keinen Nutzen erkennen lassen oder zumindest noch nicht. Es soll, als ein Beispiel, nur die auf vielfache Weise erkundete Bildung der Primzahlen erwähnt werden, die nicht nur Mathematiker sondern auch Laien beschäftigt. Selbst wenn die Quadratur des Kreises lösbar gewesen wäre, hätte daraus kein Vorteil für die Praxis erwachsen können. Bei der Suche nach einer Lösung sind jedoch - wie anfangs erwähnt - große Mathematiker auf viele andere wertvollere wissenschaftliche Erkenntnisse gestoßen.

Nach der Beilegung des Quadraturproblems durch Prof. Lindemanns Transzendenzbeweis konnten jegliche Versuche - insbes. nur noch von Laien -, die so leicht *erscheinende* Aufgabe doch noch zu bewältigen, nur in der Fertigung von *Näherungskonstruktionen* enden. Berühmte Mathematiker *vermuteten* zwar schon Jahrhunderte zuvor die Unmöglichkeit der Lösung, waren jedoch nicht in der Lage, hierfür den Beweis anzutreten. So konnten auch zu jener Zeit, selbst von Mathematikern, nur Approximationen gefunden werden, die - von den Rektifikationen abgesehen - Werte zugrundelegen, die - wohl ohne mathematisch erkennbare Zusammenhänge - mehr zufällig in der Nähe von π liegen.

Ob es sich bei der in dieser Abhandlung beschriebenen Lösung auch nur um eine rein zufällige handelt, oder ob eine Rektifikation ungeahnten Ausmaßes vorliegt, vermag der Verfasser selbst noch nicht zu beurteilen.

Zumindest dürfte ihm wohl erstmalig gelungen sein, die Zahl π unvergleichbar weit über die bisher *konstruierfähigen* 8 - 9 Dez.-Stellen hinaus *darzustellen*, wobei die Tatsache ganz besonders ins Auge fallen dürfte, daß bei sämtlichen Gliedern der aufgestellten Reihe in fast mystisch erscheinender Weise ständig die Zahl 8 erscheint bzw. in den Gliedern verborgen liegt. Bezeichnend sind wohl auch die aus den Zeichnungen ersichtlichen harmonischen Zusammenhänge der auf einfachste Weise zu gewinnenden Strecken.

Ganz gleich, welche weiteren Schlüsse eventuell aus den entdeckten und erarbeiteten Erkenntnissen gezogen werden, auch in der Mathematik - und zwar besonders in ihr, als der wohl reinsten Wissenschaft - zeigt sich das "Wunder der Schöpfung". COLERUS (1939) schrieb in seinem Vorwort zu seinem Werk: "Nicht nur für indische, babylonische und ägyptische Priester lebten und wirkten Religion und Mathematik in Nachbarschaft. Auch Pythagoras, Platon, Cusanus, Pascal, Newton, Leibniz - um nur einige Namen zu nennen - schöpften eben aus der Mathematik die Erkenntnis, daß die 'sicherste' aller Wissenschaften, an ihren Grenzen verschwimmend, wahren Glauben und wahre Demut vor dem Göttlichen erweckt".

Ob die gefundene und erarbeitete sonderbare Zahl 2,081258.... eine Sonderstellung in der Mathematik einnehmen wird, kann der Verfasser noch nicht beurteilen. Sie bewirkt auf jeden Fall, auf rascheste Weise zur *geometrischen Darstellung* von π zu führen. Selbstverständlich könnte man die Zahl π , ihre Quadratzahl o. Teile von ihr in einzelne Quadratzahlen auflösen und im gleichen Verfahren, wie es der Verfasser mit der vorgenannten Zahl tat, durch jeweilige Verkleinerungen der Strecken oder Teilung der Quadratseiten durch 10 im Sinne der Abb. 19 eine Konstruktion unter Zugrundelegung unbegrenzt vieler Dezimalstellen von π durchführen. Wer aber diesen Versuch unternimmt, wird sehr bald spüren, daß diese Strecken bzw. Glieder der Reihe absolut keine Ordnung erkennen lassen und daß diese Glieder mit jedem einzelnen (hinzugefügten) meist nur eine

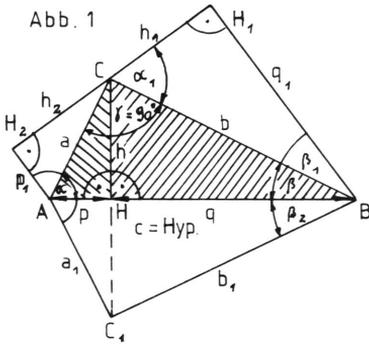
10-fache Erhöhung der Genauigkeit zur Folge haben, daß somit fast die 3fache Zahl an Operationen mit bunt durcheinander gewürfelten Strecken gegenüber der in dieser Abhandlung beschriebenen Konstruktionsart erforderlich wäre.

7. DARSTELLUNG VON π IM KOORDINATENSYSTEM (TAFEL IV)

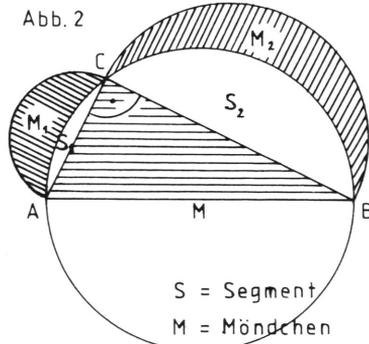
Unabhängig von den in der vorliegenden Abhandlung dargelegten Verfahrensweisen, möchte der Verfasser noch auf eine von ihm schon vor Jahrzehnten festgestellte Besonderheit der Zahl π erstmals öffentlich hinweisen:

Man trägt die Dezimalstellen von π laufend auf der y-Achse des Koordinatensystems ab, und zwar im gleichen Abstand, wie die natürlichen Zahlen auf der x-Achse. Parallel zur letzteren werden Strecken aus dem Zahlenwert der Dezimalstellen gebildet und durch Punkte begrenzt. Markiert man nun die Schnittpunkte der ganzen Zahlen auf einem sich ergebenden Vektor, zeigt sich in auffälliger Weise eine streng symmetrische Anordnung. Merkwürdigerweise bleibt die Symmetrie aber nur bis zur 40. Dez.-Stelle von π erhalten. (y entspricht dem 1,5-fachen Wert von x). Der Verfasser konnte keine andere Zahl finden, die gleiche Eigenschaften aufweist, weder die Euler'sche Zahl "e" noch eine andre markante; eine gewisse Ähnlichkeit zeigte sich lediglich bei $\sqrt{2}$.

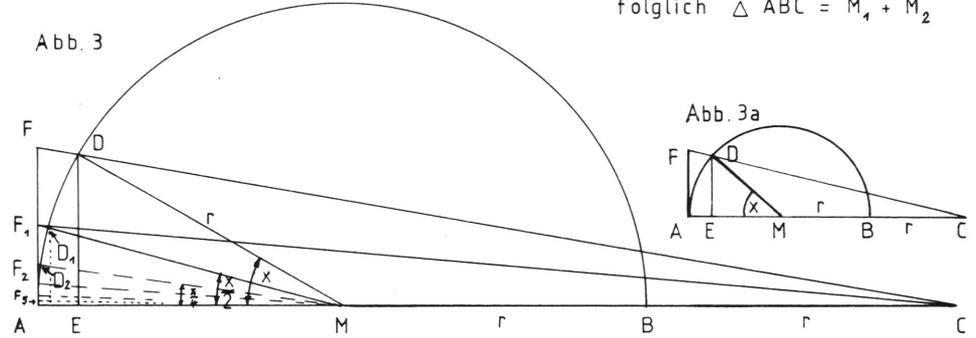
Welche Bedeutung dieser Besonderheit zukommt, und ob ein Zusammenhang mit den in dieser Abhandlung beschriebenen Konstruktionen bestehen könnte, mußte bisher ungeklärt bleiben.



- $\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle CHB$
- $\triangle AH_1C = \triangle AHC$
- $\triangle BH_1C = \triangle BHC$
- $\triangle AHC + \triangle BHC = \triangle ABC = \triangle ABC_1$

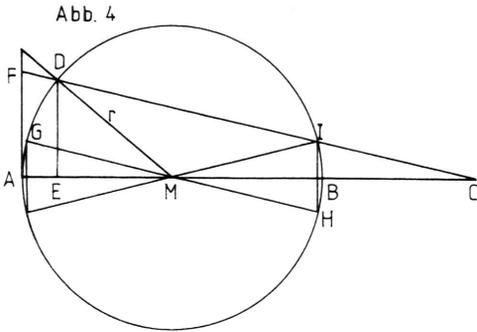


- $S = \text{Segment}$
- $M = \text{Möndchen}$
- Halbkrs. ü. \overline{AC} + Hkr. ü. \overline{BC} = Hkr. ü. \overline{AB}
(unten wie oben)
- Halbkrs. ü. \overline{AB} = $\triangle ABC + S_1 + S_2$
- " " \overline{AC} = $M_1 + S_1$
- " " \overline{BC} = $M_2 + S_2$
- " " $\overline{AB} - (S_1 + S_2) = \triangle ABC$
- folglich $\triangle ABC = M_1 + M_2$

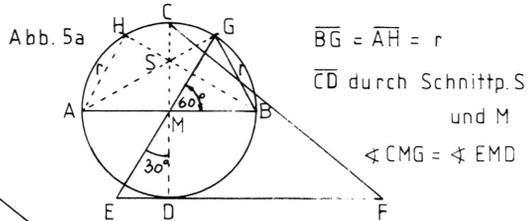
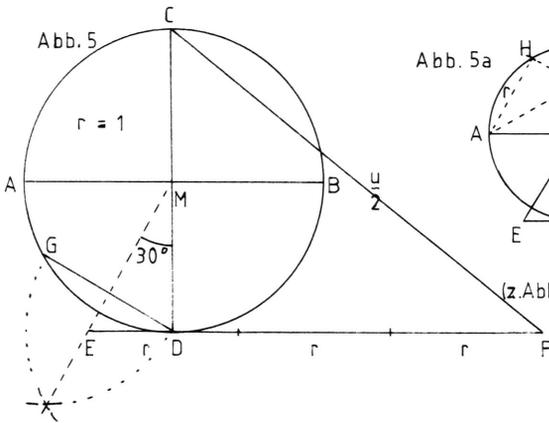


\widehat{AD} sei der zu rektifiz. Bogen.
 $2r$ verlängern um r ,
 $\overline{AF} \perp \overline{AB}$ \overline{CF} durch D ziehen,
 dann ist $\overline{AF} \approx \widehat{AD}$
 $\sin x = \frac{DE}{r}$ $DE = r \cdot \sin x$
 $\cos x = \frac{EM}{r}$ $EM = r \cdot \cos x$
 $\triangle DEC \sim \triangle FAC$ $\overline{AF} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{EC}$
 $\overline{AF} = \frac{DE \cdot \overline{AC}}{EC} = r \cdot \frac{3 \cdot \sin x}{2 + \cos x}$

Unterste Grenze der Zeichenmöglichkeit (b. $r \approx 1 \text{ dm}$):
 $x = 1,875^\circ$ (96-eck) (Der ϕ könnte zwar noch
 erkennbar halbiert werden, aber $\frac{D_5 F_5}{r} \approx 0,0535 \dots$
Millimeter ist ungefähr die kleinste m. unbew.
Auge noch erkennb. Strecke.*) Bei $r \approx 1 \text{ dm}$
 wäre $\pi \approx 3,141592634 \dots$ (7 richtige Dez. Stellen)
Oberste Grenze: Höchst. $x = 30^\circ$
 Bei $r \approx 1 \text{ dm}$ ist $\pi \approx 3,140237 \dots$ (nur 2 richt. St.)
 * Nach Prof. Strubecker wäre kl. m. unb. Auge erk. Str. 0,05 mm!

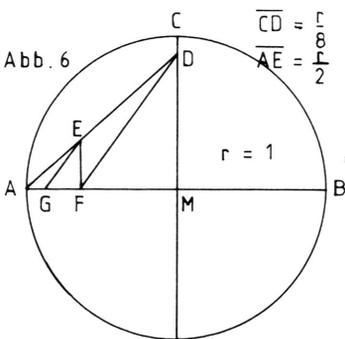


$\overline{GH} \parallel \overline{CF}$
 $\triangle MBI \approx \triangle IBC$ (bes. bei kl. \angle !)
 $x = \overline{AF} = \boxed{r \cdot \frac{2 \sin x + \tan x}{3}}$
Unt. Grenze d. Zeichengenauigkeit (b. $r \approx 1 \text{ dm}$)
 $x = 1,875^\circ$ (96-eck)
 $\pi \approx 3,141592834\dots$ (6 richt. Dez. Stellen)
Oberste Grenze höchstens $x = 15^\circ$
 $\pi \approx 3,142349\dots$ (nur 2 richt. Dez. St.!)

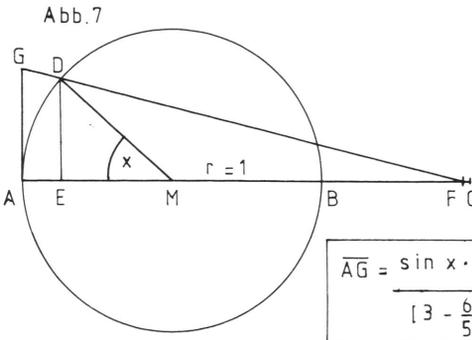


$\overline{CF} = \sqrt{9,869231715\dots} = 3,141533338\dots$
 Richtiger Wert v. = $3,141592653\dots$
 Ungenauigkeit: $r \cdot 0,000059315\dots$

$\overline{BG} = \overline{AH} = r$
 \overline{CD} durch Schnittp. S und M
 $\angle CMG = \angle EMD$
 (z. Abb. 5) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ Tangente $\perp D$
 $\overline{DG} = r$ halbieren $\overline{EF} = 3r$
 $\overline{DE} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $CF^2 = CD^2 + DF^2$
 $CF^2 = 4 + (3 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 4 + 9 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}$
 $CF^2 = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} = 9,869231715\dots$



$\overline{CD} = \frac{7}{8}$
 $\overline{AE} = \frac{1}{2}$
 $AD^2 = 1 + (\frac{7}{8})^2 = \frac{8^2 + 7^2}{8^2}$ $\overline{EF} \parallel \overline{CM}$ $\overline{EG} \parallel \overline{DF}$
 $\triangle AGE \sim \triangle AFD$ $\overline{AG} : \overline{AF} = \overline{AE} : \overline{AD}$ $\overline{AG} = \overline{AF} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$
 $\triangle AFE \sim \triangle AMD$ $\overline{AF} : \overline{AM} = \overline{AE} : \overline{AD}$ $\overline{AF} = \overline{AM} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$
 $\overline{AG} = \overline{AM} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$ $\overline{AM} = 1$ $\overline{AG} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AD}^2}$
 $\overline{AG} = \frac{0,5^2}{8^2 + 7^2} = \frac{0,25 \cdot 8^2}{8^2 + 7^2} = \frac{4^2}{8^2 + 7^2} = \frac{16}{113}$
 $3 + \frac{16}{113} = 3,14159292\dots$ Ungenauigk. 0,00000026...



$$\overline{CF} = \frac{\overline{AE}}{5} \quad \overline{DE} = r \cdot \sin x$$

$$\overline{EM} = r \cdot \cos x$$

$$\triangle GAF \sim \triangle DEF \quad \overline{AG} : \overline{DE} = \overline{AF} : \overline{EF}$$

$$\overline{AG} = \frac{\overline{DE} \cdot \overline{AF}}{\overline{EF}} \quad \overline{AE} = 1 - \cos x$$

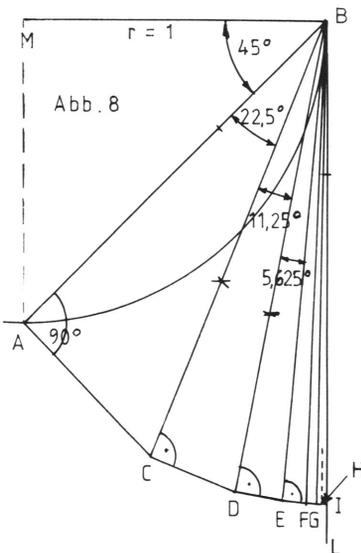
$$\overline{CF} = \frac{1}{5} (1 - \cos x)$$

$$\overline{AG} = \frac{\sin x \cdot [3 - \frac{1}{5} \cdot (1 - \cos x)]}{[3 - \frac{6}{5} (1 - \cos x)]} \quad \overline{AD} \approx \overline{AG}$$

Unterste Grenze der Zeichenmöglichkeit: (\overline{AE} muß d. 5 geteilt werden!)

(Bei $r \approx 1$ dm:) $x \approx 10^\circ$; denn $1 - \cos 10^\circ = 1,519$.mm $\pi \approx 3,14159261\dots$ (7 r. Dez.St.)

Oberste Grenze (\approx) 30° $\pi \approx 3,141560817\dots$ (4 r. Dez.St.) 45° $\pi \approx 3,1412148\dots$ (3 r. Dez.St.)



\overline{AB} ist der zu rektifiz. Bogen
 (Lot) $\overline{BL} \perp \overline{BM}$ Sehne \overline{AB} ziehen
 \sphericalangle ABL halbieren $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ "
 \sphericalangle CBL " $\overline{DE} \perp \overline{BD}$ " usf.

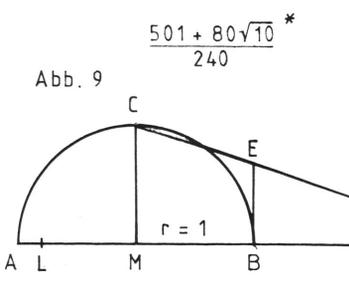
$$\overline{BI} \approx \frac{\pi}{2} \approx \frac{1}{\cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{4} \cdot \cos \frac{90^\circ}{8} \cdot \cos \frac{90^\circ}{16} \dots}$$

Unterste Grenze der Zeichenmöglichkeit:

(Bei $r \approx 1$ dm:) $0,17578125^\circ = \frac{90^\circ}{512} = 2048$ -eck

(Mit unbew. Auge noch erkennbare bzw. mögliche \sphericalangle - Teilung !)

$\pi \approx 3,141592346\dots$ (6 richt. Dez. Stellen)



$$\frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} \quad \overline{BD} = 2r \quad \overline{BE} \perp \overline{BD} \quad \overline{DE} = \overline{DF} \quad \text{* Formel n. Simon (Lit.V. Nr. 3)}$$

$$\overline{LM} = \frac{4}{5}r \quad \overline{FK} = \frac{3}{8}r \quad \overline{LK} = 2r\pi$$

Beweis: $\triangle CMD \sim \triangle EBD \quad \overline{CM} : \overline{EB} = 3r : 2r$

$$\overline{EB} = \frac{2}{3}r \quad \overline{DE} = r\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{6}{3}\right)^2} = r\sqrt{\frac{40}{9}}$$

$$\pi \approx \frac{r}{2} \left(3 + \sqrt{\frac{40}{9}} + \frac{47}{40} \right) = 3,141592553 \text{ (6St.)}$$

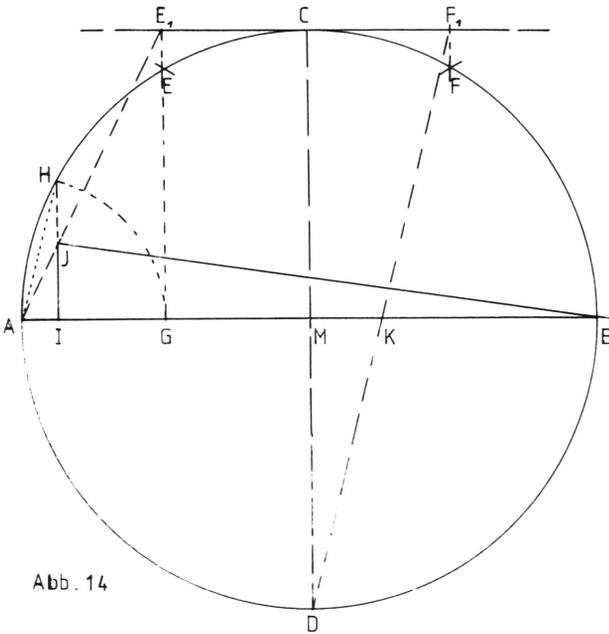


Abb. 14

$r = 1$

r abtragen von A nach E

u. „ B „ F

Tangente bei C anlegen

Schnittpunkte E u. F durch

\perp mit E_1 u. G bzw. F_1 u. K verb.

$\overline{CE_1} = \overline{CF_1} = \overline{AG} = \frac{r}{2}$

\overline{AG} auf Kreisbg. abtr. = \overline{AH} L

$\overline{HI} \perp \overline{AM} \quad \overline{AI} = \frac{r}{8}$ (s. Bew.1)

Schnittp. $\overline{AE_1}$ mit \overline{HI} erg. J

$\overline{IJ} = \frac{r}{4} = \frac{2}{8}r \quad \overline{BI} = \frac{15}{8}r$

$\overline{BJ} = r \sqrt{\left(\frac{2}{8}\right)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{r\sqrt{229}}{8}$

$\overline{KM} = \frac{r}{4}$ (s. Bew.2)

$\overline{AK} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}r$

$\overline{BL} = \overline{AK} \quad \overline{JL} = \frac{u}{2} \approx \pi$

Ungenauigkeit $r \cdot 0,00000059\dots$

Beweis: 1) $\overline{AH} = \frac{r}{2} \quad \overline{AH}^2 = \frac{r^2}{4}$
 $\overline{AH}^2 = \text{Reck } \overline{AI} \cdot \overline{AB} \quad \overline{AI} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AB}} = \frac{\frac{r^2}{4}}{2r} = \frac{r^2}{4} \cdot \frac{1}{2r} = \frac{r}{8}$

*) $\triangle AGE_1 \sim \triangle AIH$

$\overline{GE_1} = 2 \overline{AG}$ folglich $\overline{IJ} = 2 \overline{AI} = \frac{2}{8}r$

2) $\triangle DCF_1 \sim \triangle DMK \quad \overline{KM} = \frac{\overline{DM}}{4} = \frac{r}{4}$

$\frac{\sqrt{229} + 10}{8} \approx \pi$

$\pi \approx 3,141593243$

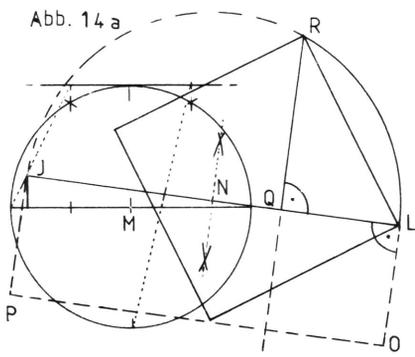


Abb. 14 a

Bildung des Quadrats:

$\overline{JL} = \frac{u}{2} \approx \pi \quad \frac{\overline{JL}}{2} = \overline{JN} = \overline{NL}$

Kreis um N ziehen

$\overline{LO} = \overline{LQ} = r$ (d. Krs. u. M)

Reck JLOP = $r \cdot \frac{u}{2} = r \cdot \pi$

$\overline{QR} \perp \overline{LN}$

\overline{LR} = s des Kath. \square (Euklid)

$\overline{LR}^2 \approx r^2 \cdot \pi$

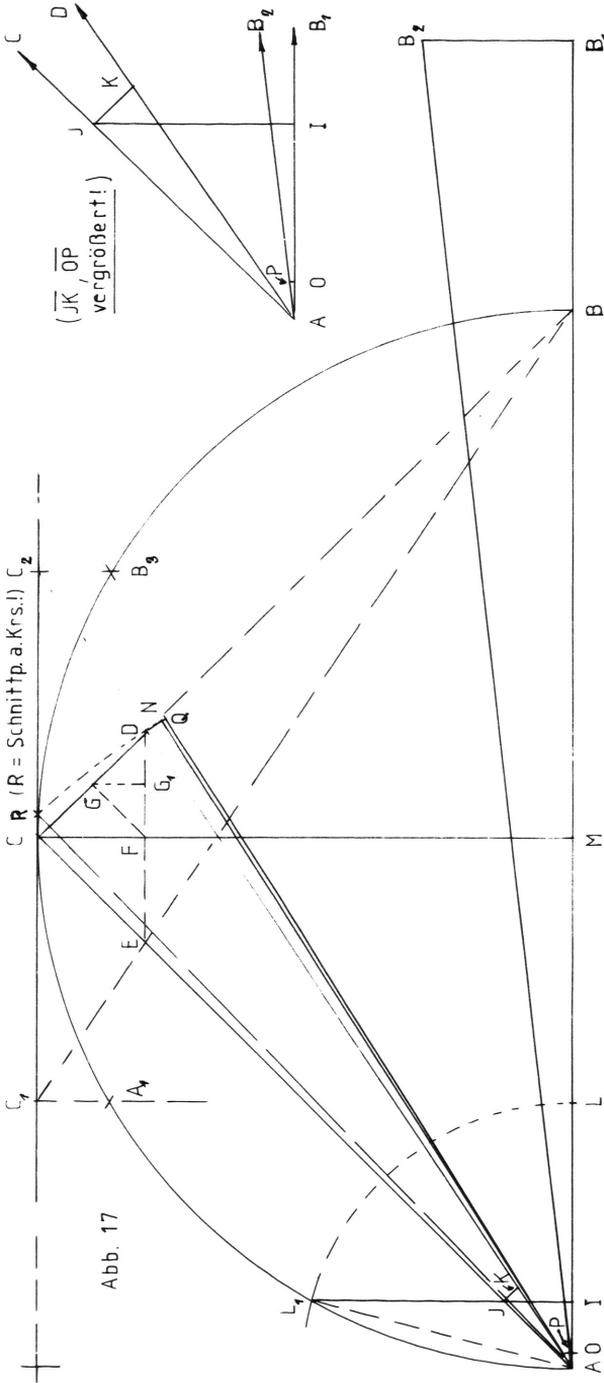


Abb. 17

(JK, OP
vergrößert!)

(s. Vergrößerung! -rechts oben-) $\overline{AA_9} = \overline{BB_9} = r$

$$\overline{AC} = \overline{BC} = r\sqrt{2}$$

$$\overline{CC_1} = \overline{CC_2} = \frac{r}{2}$$

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \frac{r\sqrt{2}}{5}$$

$$\overline{EF} = \overline{FD} = \frac{r}{5}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{AC^2 + CD^2} = r\sqrt{2,08}$$

$$\overline{FG_1} = \overline{GG_1} = \frac{r}{10}$$

$$\overline{AL} = \overline{AL_1} = \frac{r}{2}$$

$$\overline{AI} = \frac{r}{8}$$

$$\overline{IO} = \overline{OG_1} = \frac{r}{10}$$

$$\overline{AO} = \frac{r}{8} - \frac{r}{10} = \frac{r}{40}$$

$$\overline{DN} = \overline{JK} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{AJ} = \sqrt{2(AI)^2} = \frac{r\sqrt{2}}{8}$$

$$\overline{JK} \perp \overline{AC}$$

$$\triangle AJK \sim \triangle ACD$$

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JK}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{JK}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{JK}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{JK} \cdot \overline{CD}}{\overline{AC}^2}$$

$$\overline{JK} = \overline{DN} \perp \overline{AD}$$

$$\overline{AN} = \sqrt{AD^2 + DN^2}$$

$$= r\sqrt{AC^2 + CD^2 + JK^2}$$

$$= r\sqrt{2,08125}$$

$$\overline{BB_1} = \frac{r}{2}$$

$$\overline{BB_2} = \overline{CD} = \frac{r\sqrt{2}}{5}$$

$$\overline{AO} = \frac{\overline{AB_1}}{100}$$

$$\overline{AO} : \overline{AB_1} = \overline{OP} : \overline{BB_2}$$

$$\overline{OP} = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{BB_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{r\sqrt{2}}{500}$$

$$\overline{OP} = \overline{NQ} \perp \overline{AN}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{AN^2 + NQ^2}$$

$$= r\sqrt{2,081258}$$

$$\overline{AR} = \overline{AQ}$$

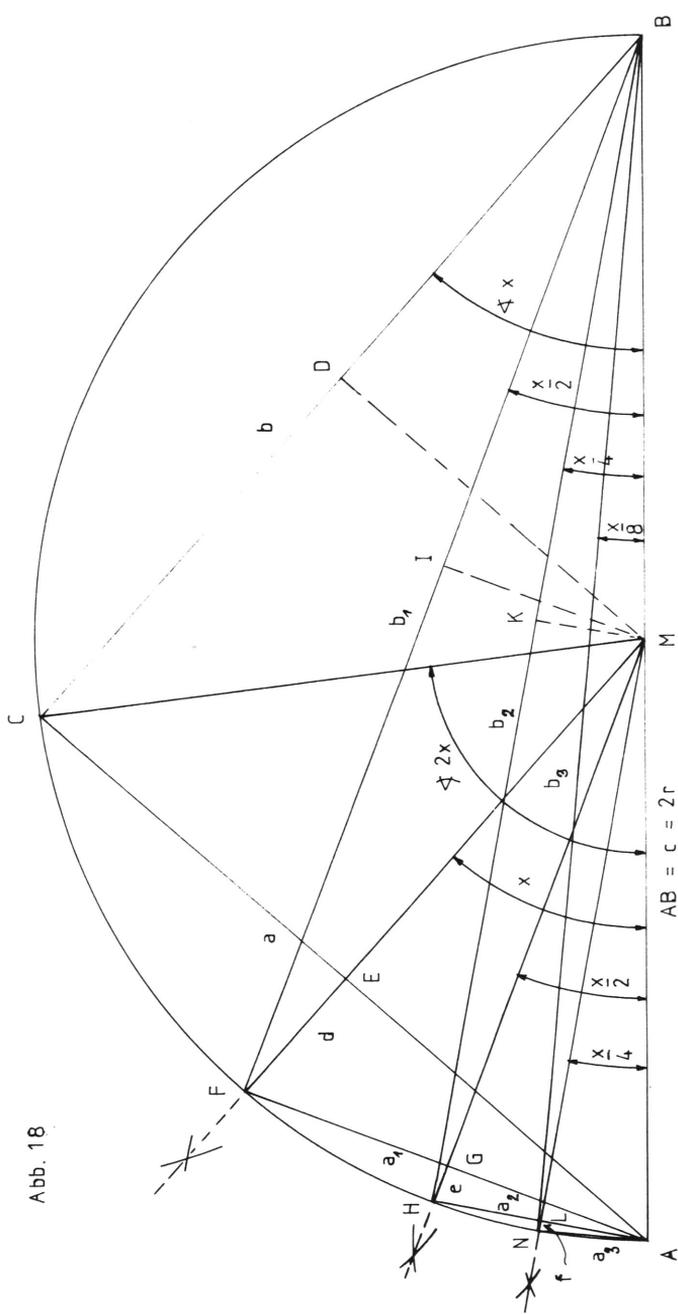


Abb. 18

$$\begin{array}{llll}
 a = \overline{AC} & b = \overline{BC} & d = \overline{EF} & a_1 = \overline{AF} \\
 \frac{a}{2} = \overline{AE} = \overline{CE} = \overline{DM} & \frac{b}{2} = \overline{CD} = \overline{EM} & & \frac{a_1}{2} = \overline{AG} = \overline{IM} \\
 b_1 = \overline{BF} & e = \overline{GH} & a_2 = \overline{AH} & \frac{a_2}{2} = \overline{AL} = \overline{KM} \\
 \frac{b_1}{2} = \overline{FI} = \overline{GM} & & & \frac{a_2}{2} = \overline{AN} \\
 b_2 = \overline{BH} & f = \overline{LN} & & b_3 = \overline{BN} \\
 \frac{b_2}{2} = \overline{HK} = \overline{LM} & & &
 \end{array}$$

(s. gesond. Beweis!)

Beweis (zu Abb.18)

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} = 1 - \frac{b^2}{4}$$

$$d = 1 - \frac{b}{2}$$

$$d^2 = 1 - b + \frac{b^2}{4}$$

$$a_1^2 = \frac{a^2}{4} + d^2$$

$$a_1^2 = 1 - \frac{b^2}{4} + 1 - b + \frac{b^2}{4}$$

$$a_1^2 = 2 - b$$

$$b_1^2 = 4 - (2 - b) = 2 + b$$

$$b_1 = \sqrt{2 + b}$$

$$\frac{a_1^2}{4} = 1 - \frac{b_1^2}{4}$$

$$e = 1 - \frac{b_1}{2}$$

$$e^2 = 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4}$$

$$a_2^2 = \frac{a_1^2}{4} + e^2$$

$$a_2^2 = 1 - \frac{b_1^2}{4} + 1 - b_1 + \frac{b_1^2}{4}$$

$$a_2^2 = 2 - b_1$$

$$b_2^2 = 4 - (2 - b_1) = 2 + \sqrt{2 + b}$$

$$b_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + b}}$$

$$\frac{a_2^2}{4} = 1 - \frac{b_2^2}{4}$$

$$f = 1 - \frac{b_2}{2}$$

$$f^2 = 1 - b_2 + \frac{b_2^2}{4}$$

$$a_3^2 = \frac{a_2^2}{4} + f^2$$

$$a_3^2 = 1 - \frac{b_2^2}{4} + 1 - b_2 + \frac{b_2^2}{4}$$

$$a_3^2 = 2 - b_2$$

$$b_3^2 = 4 - (2 - b_2) = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + b}}$$

$$b_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + b}}}$$

usf.

Beweis (zu Abb.19) Strecken-Teilung durch 10 oder 100

$$\overline{AA_1} = \overline{AA_2} = \frac{r}{2} \quad \overline{AC} = r\sqrt{2} \quad \overline{AD} = \overline{AE} = \frac{r\sqrt{2}}{5} \quad \overline{AF} = \overline{AG} = \frac{r}{5} = \frac{\overline{AB}}{10}$$

$$\triangle FAB \sim \triangle KGB \quad (\sphericalangle\text{-Gleichheit!}) \quad \overline{AF} : \overline{AB} = \overline{GK} : \overline{BG} \quad \overline{GK} = \frac{\overline{AF} \cdot \overline{BG}}{\overline{AB}} = \frac{9}{50} r$$

$$\overline{EG} = \overline{AF} \quad \overline{EK} = \overline{EG} - \overline{GK} = \frac{10}{50} r - \frac{9}{50} r = 0,02 r = \frac{\overline{AB}}{100} \quad (\overline{EK} \text{ als } \overline{AL} \text{ abtragen!})$$

(Bei der Multiplikation von Strecken mit 10 oder 100 sind x oder y die gegebenen und $\overline{BS_3}$ bzw. $\overline{BS_1}$ die vervielfachten Strecken).

Teilung des Inhalte eines beliebig großen Quadrates durch 10

$$\overline{AH} = \frac{3}{2} r \quad \overline{IH} = \frac{r}{2} \quad \overline{IH}^2 = \frac{r^2}{4} \quad \overline{AI}^2 = \frac{9}{4} r^2 + \frac{1}{4} r^2 = \frac{10}{4} r^2 \quad \boxed{\overline{IH}^2 = \frac{\overline{AI}^2}{10}} \quad \boxed{\overline{IH} = \frac{\overline{AI}}{\sqrt{10}}}$$

$$\triangle AS_5S_6 \sim \triangle AHI \quad \square \text{ mit } s = z = \frac{1}{10} \text{ d. } \square \text{ mit } s = \overline{AS_6}$$

Bei gleichem \sphericalangle stehen alle \triangle im gl. Verh. zum Ausgangs- \triangle AHI, somit auch ihre Seiten und die Inhalte der zugehörigen Hypoth.- u. Kath.- \square e.

Teilung d. 10 = gegeb. \square -s v. A aus a. \overline{AI} abtrg., $z \perp \overline{AB}$ = gesuchte \square -s (Seite)
 Multipl.m. 10 = „ „ „ (z) \perp auf \overline{AB} , S_6 bis A = s des \square m. 10-f. Inh. $AS_6 = z \cdot \sqrt{10}$

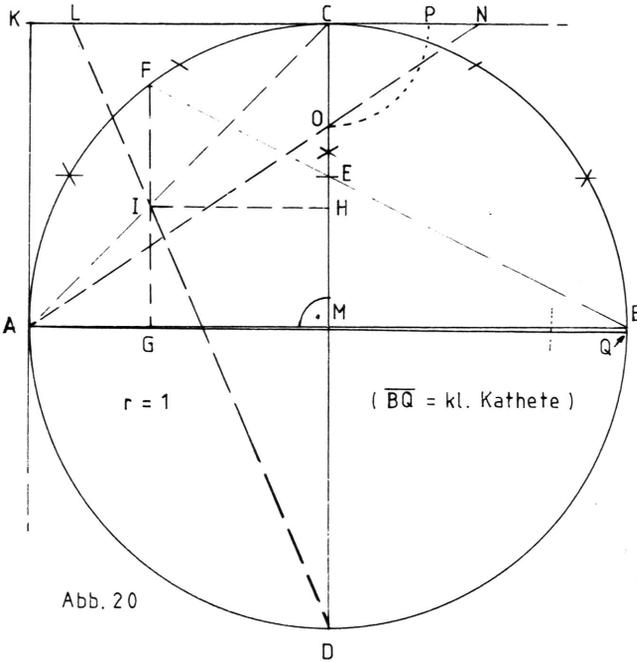


Abb. 20

(Teilung der Strecke $\overline{LP} : 100$ gem. Abb.19)
 (" " " $\overline{AQ} : 8$ " " 16)

$$\begin{aligned} \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM} &= r = 1 \\ \overline{EM} &= \frac{r}{2} \quad \overline{FG} = 0,8 r \\ \overline{AC} &= r\sqrt{2} \quad \overline{IH} = 0,6 r \\ \overline{GI} &= \overline{AG} = 0,4 r \\ \overline{CL} &= \frac{6}{7} r \\ \text{(Beweis: } \triangle DHI &\sim \triangle DCL \\ \overline{DH} : \overline{CD} &= \overline{HI} : \overline{CL} \\ \overline{CL} &= \frac{\overline{CD} \cdot \overline{HI}}{\overline{DH}} = \frac{2 \cdot 0,6}{1,4} = \frac{6}{7} r \\ \overline{KL} &= \overline{CK} - \overline{CL} = \frac{1}{7} r \\ \overline{CN} &= \frac{r}{2} \quad \overline{CO} = \frac{r}{3} \\ \text{(Beweis: } \triangle OCN &\sim \triangle AKN \\ \overline{CN} &= \frac{\overline{KN}}{3} \text{ folgl. } \overline{CO} = \frac{\overline{AK}}{3} \\ \overline{CO} &= \overline{CP} \quad \overline{KP} = \frac{4}{3} r \\ \overline{LP} &= \frac{4}{3} r - \frac{1}{7} r = 1,19047619\dots r \\ \overline{LP} &= \overline{BQ} \quad \overline{AQ} = \sqrt{4 - \overline{BQ}^2} \\ 100 & \\ \pi &\approx 3,141592658\dots \\ \text{Ungenauigk.} &\approx 0,0000000048 \end{aligned}$$

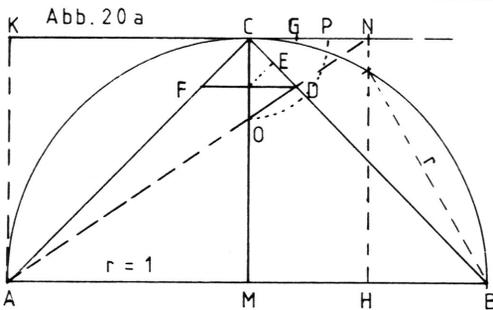


Abb. 20 a

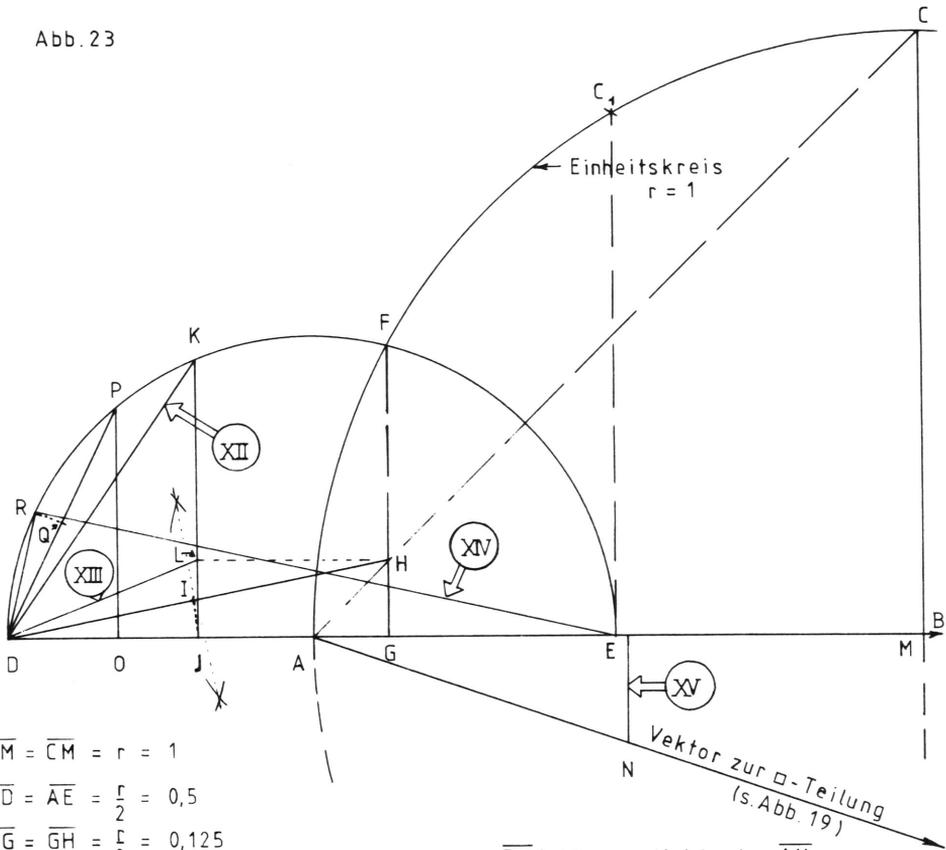
$$\begin{aligned} \overline{CO} = \overline{CP} &= \frac{r}{3} \quad \overline{KP} = \frac{4}{3} r \quad \overline{CE} = \frac{r\sqrt{2}}{10} \quad \overline{GP} = \overline{CE} \\ \overline{KG} &= \overline{KP} - \overline{GP} = 1,19191977\dots \\ \pi &\approx 3,141592657\dots \\ \text{Ungenauigk.} &\approx 0,0000000034 \text{ (kurz: } 3,4 \cdot 10^{-9}) \end{aligned}$$

(20 b) (ohne Abb.)

$$\begin{aligned} \frac{15}{8} r &= 1,875 r \text{ (Strecke } \overline{BI} \text{ in Abb.14)} \\ - \frac{r}{2} &= 0,5 r = \overline{BH} = \overline{HM} \text{ (nebenst.)} \\ \hline &1,375 r \\ + &\frac{0,00496 r}{1,37996 r : 10 = 0,137996 r} \\ \hline &10,00496 r = 0,5 r = \overline{BH} \\ &\quad - \frac{0,004 r}{0,496 r : 100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} r - 0,137996 r &= 1,195337333\dots r \\ \pi &\approx 3,14159265367917\dots \\ \text{Ungkt. } &0,0000000008938\dots (\approx 8,9 \cdot 10^{-11}), \\ \text{d.h. weniger als 1 Millimeter bei} & \\ \text{einem Kreisumfang } &\approx 4/5 \text{ d. Erdäquators!} \end{aligned}$$

Abb. 23



$$\overline{AM} = \overline{CM} = r = 1$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \frac{r}{2} = 0,5$$

$$\overline{AG} = \overline{GH} = \frac{r}{8} = 0,125$$

$$\overline{DH} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{8}$$

$$\overline{DI} = \frac{\overline{DH}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{16}$$

$$\overline{DI} = \overline{DJ} \text{ (auf } \overline{AD} \text{ abgetragen.) } \quad \overline{JK} \perp \overline{AD}$$

$$\square \overline{DJ} \cdot \overline{DE} = \overline{DK}^2 \text{ (Euklid!)} \quad \textcircled{XII}$$

$$\overline{DK}^2 = \frac{\sqrt{26}}{16} = 0,3186887195... \quad \textcircled{XII}$$

$$\overline{HL} \parallel \overline{DG} \quad \overline{JL} = \frac{r}{8}$$

$$\overline{DJ}^2 + \overline{JL}^2 = \overline{DL}^2 = 0,1171875 \quad \textcircled{XIII}$$

$$\overline{DJ}^2 = \left(\frac{\sqrt{26}}{16}\right)^2 = \frac{26}{256} \quad \overline{JL}^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\overline{DL}^2 = \frac{30}{256}$$

$$\overline{DK} \text{ (abtrag. a. Vektor)} = \overline{AN}$$

$$\overline{DK}^2 = \overline{AN}^2 = \frac{\sqrt{26}}{16}$$

$$\overline{EN}^2 = \frac{\overline{AN}^2}{10} = \frac{\sqrt{26}}{10 \cdot 16} = 0,0318688719... \quad \textcircled{XIV}$$

$$\overline{EN} = \overline{DO} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10} \cdot 4} \quad \overline{OP} \perp \overline{AD} \quad \textcircled{XV}$$

$$\square \overline{DO} \cdot \overline{DE} = \overline{DP}^2 \text{ (Euklid!)} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10} \cdot 4}$$

$$\frac{\overline{DP}}{2} = \overline{DQ} \quad \overline{DQ}^2 = \frac{\overline{DP}^2}{4} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10} \cdot 16}$$

$$\overline{DQ} \text{ (a. Krs. Bg. abgetr.)} = \overline{DR}$$

$$\overline{DR}^2 = \overline{DQ}^2 = \frac{\overline{DP}^2}{4} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{10} \cdot 16}$$

$$\overline{ER}^2 = 1 - \frac{\overline{DP}^2}{4} = 0,955370363... \quad \textcircled{XVI}$$

(Zu Abb. 24) Berechnung und Erläuterungen :

Tafel II

I	$\overline{IL} = \overline{AL}_1$ (auf Vektor α)* $\overline{L}_1\overline{O} = \frac{\overline{AL}_1}{100}$ $\overline{L}_1\overline{O} \perp \overline{FN}$ als \overline{NP} abtragen	$L_1O^2 = 0,00003186887195\dots$ $FN^2 = 0,1171875$ $FP^2 = 0,11721936887195\dots$	II
III	$10 \cdot \overline{CS}$ oder $2\sqrt{2}$! als \overline{AQ} auf Vektor α abtrg. \overline{FP} als $\overline{QR} \perp$ auf α \overline{AR} als \overline{AT} auf α abtrg. $\frac{\overline{AT}}{100} = \overline{TU}$ $\overline{TU} \perp \overline{AT}$ $\overline{TU} \perp \overline{MS}_3$ als \overline{VS}_3 abtrg. $\overline{MV} : 10$ (auf α \overline{MV} abtr.) = $\frac{\overline{AV}_1}{V_1W}$	$AQ^2 = 8,0$ $AR^2 = 8,11721936\dots$ $TU^2 = 0,0008117219\dots$ $MS_3^2 = 0,125$ $MV^2 = 0,1258117219\dots$ $V_1W^2 = 0,001258117219$ $V_1W^2 + AS^2 = 2,0812581172193\dots$	IV
V	$AS^2 = (\sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{5})^2$		

* (Vektoren werden mit kleinen Buchstaben der deutschen Schrift gekennzeichnet)

π mit 20 richtigen Dezimalstellen bedeutet:
 Bei einem Kreis mit 100 Billionen km (10^{14} km) Durchmesser, also mit einem Umfang von $\approx 33,2$ Lichtjahren wäre die Ungenauigkeit weniger als 1 mm!
 (s. Vergleiche der Ungen.-Werte und Verdeutlichung von Lichtjahrlängen)

<u>Weitere Glieder zu 2,08... (Zu Tafel I)</u>	(s. Abb. 25)
$5,5\dots^{43}$ (Periode)	$\overline{CS} = \frac{r}{3}$ $ES^2 = h^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{9} = 0,5$
$7,5^{-46}$ ($\frac{1,171875}{0,15625}$)	$AC_2 = r\sqrt{3}$ $AF^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$
$4,3264^{-49}$ ($2,08^2$)	$2,08 = 2r + \frac{\overline{GH}}{10}$ $AU = AU$ $AU^2 = 2,08^2$ $\overline{DI} = \frac{\sqrt{2,08}}{10}$ $\overline{KL} = \overline{DI}$ $\overline{LN} \perp \overline{AK}$ $\overline{KN} \cdot 1 = 0,0208$
$3,43322\dots^{-51}$ ($(\frac{15}{256})^2$)	{ oder : $\overline{PQ} : 2 = \overline{PR} = \frac{15}{256}$ $\overline{AT} = \frac{3}{2}r$
$2,25^{-54}$ ($1,5^2$)	$\overline{AD} = \sqrt{2,08}$ $\overline{AV} = \frac{\sqrt{2,08}}{2}$
$7,2111\dots^{-57}$ ($\sqrt{52}$) ($\sqrt{0,52} = \frac{\sqrt{2,08}}{2}$)	$\overline{T}_1\overline{W} = \overline{AV}$ $\overline{T}_1\overline{W} \cdot 1 = \overline{T}_1\overline{Z}^2 = 0,72111\dots$

Tafel III Schema für die Konstruktion für π mit 45 richtigen Dez.Stellen

Strecke (s. Abb.22-24) [$r \approx 1$ dm (z.B.)] (*)	Quadrat
$\frac{\overline{AQ}}{10} = 0,14$ [(VIII) : 10]	0,0196
0,21 [(0,14 · 1,5)] · $\sqrt{10}$ oder (IX) : $\sqrt{10}$	+ 0,441
0,678 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 0,4606
: 100 = 0,00678 ... □ →	0,00004606
\overline{AQ} (=VIII) : $\sqrt{10}$	+ 0,196
0,442 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 0,19604606
: 100 = 0,00442 (*) □ →	0,000019604606
\overline{AS}_* (v. Abb. 24) = $\frac{\sqrt{2,08}}{2}$	+ 5,2
2,28 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 5,200019604606
: 100 = 0,0228 ... □ →	0,0005200019604606
\overline{BN} (V) BN : 10 □ →	+ 0,008
	0,0085200019604606
\overline{BS} (VI) BS^2 →	+ 1,25
1,12 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 1,2585200019604606
: 10 = 0,112 ... □ →	0,012585200019604606
\overline{KL} (III) · $\sqrt{10}$ * □ →	+ 0,1373291015625
0,387 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 0,149914301582104606
: 10 = 0,0387 ... □ →	0,001499143 ...
\overline{ER} (XIV) · $\sqrt{10}$ □ →	+ 9,55370363 ...
3,09 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 9,55520277 ...
: 100 = 0,0309 ... □ →	0,000955520277 ...
\overline{KL} (III) · $\sqrt{10}$ (s.oben)* □ →	+ 0,1373291015625
0,371 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 0,138284621839 ...
: 10 = 0,0371 ... □ →	0,001382846218 ...
\overline{GH} (I) · $\sqrt{10}$ □ →	+ 1,171875
1,083 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 1,173257846 ...
: 100 = 0,01083 ... □ →	0,00011732578 ...
\overline{DK} (XII) DK^2 →	+ 0,3186887195
0,564629121 ...	← $\sqrt{\quad}$ ← 0,3188060453 ...
: 100 = 0,00564 ... □ →	0,00003188060453

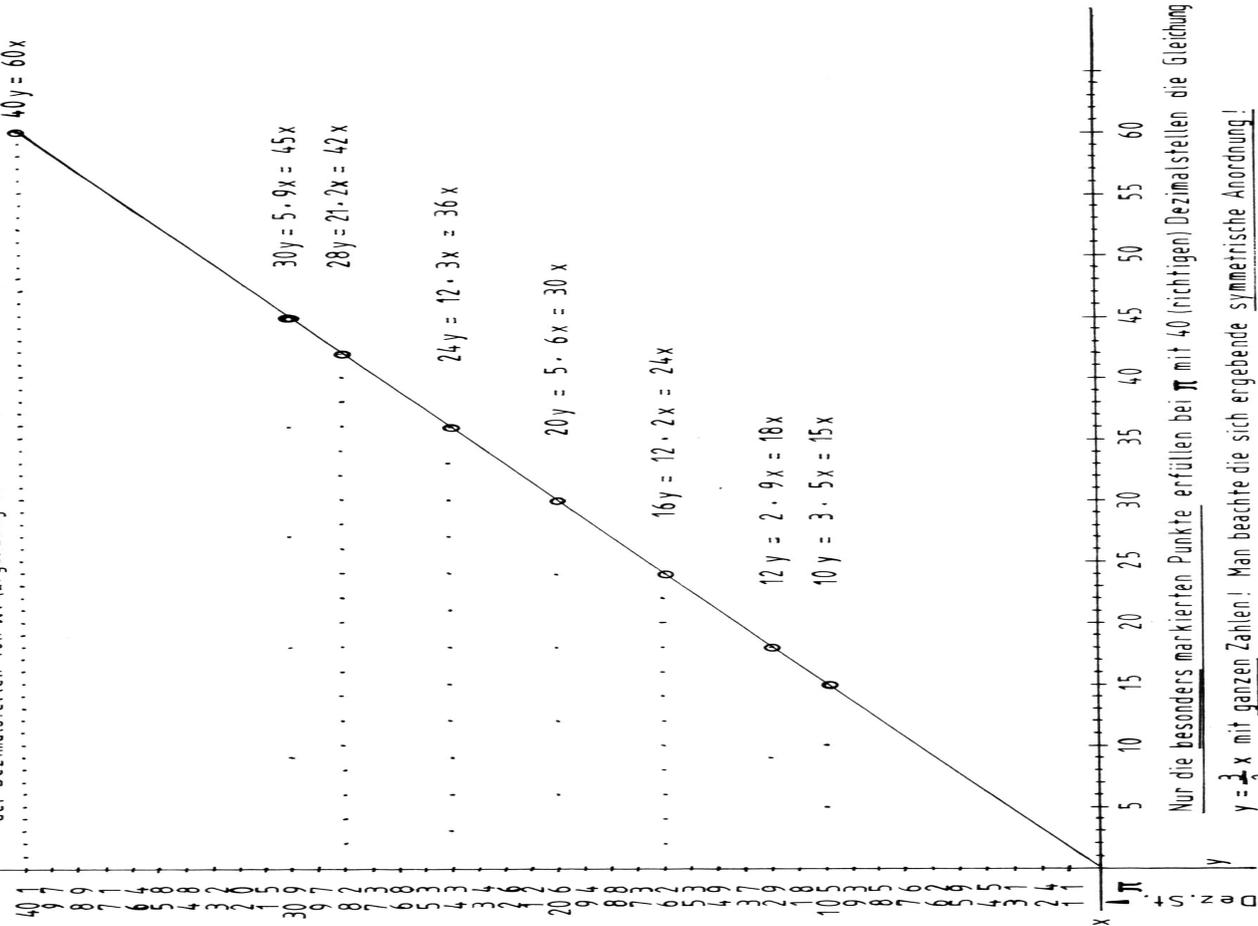
Fortsetzung wie Berechnung zu Abb.24,
 aber statt L_0^2 ist der oben aufgeführte Wert einzusetzen!
 (Dementsprechend ändern sich auch die folgenden Summen)

(*) Bei ≈ 1 dm Radius mißt die kürzeste Strecke (BR/100) $\approx 0,442$... mm, ist also noch mit unbewaffnetem Auge erkenn- und übertragbar!

π mit 45 richt. Dez.St.: Kreisumfg. mit ≈ 332 Quadrillionen Lichtjahren bis auf Bruchteile eines Millimeters genau! (s.Zusammenstellung)

Tafel IV

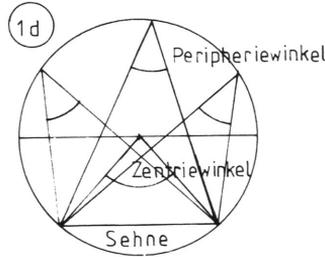
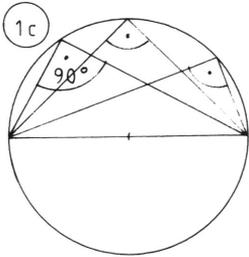
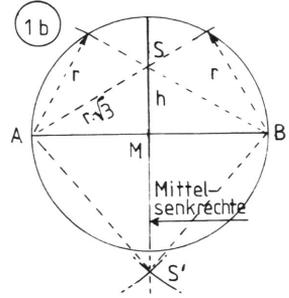
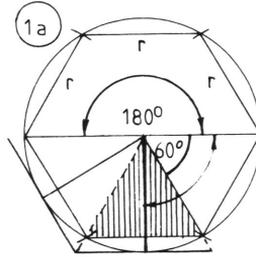
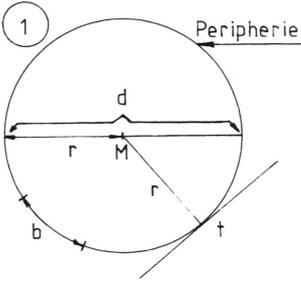
Die Punkte über der Abszisse (x-Achse) haben den gleichbleibenden Abstand des jeweiligen Wertes der Dezimalstellen von π . (Ergänzung sei dem Leser überlassen (s. untenst. Vermerk!).)



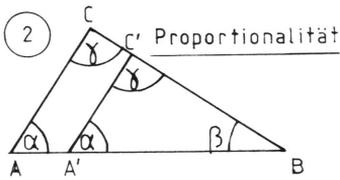
Nur die besonders markierten Punkte erfüllen bei π mit 40 (richtigen) Dezimalstellen die Gleichung

$y = \frac{3}{2}x$ mit ganzen Zahlen! Man beachte die sich ergebende symmetrische Anordnung!

ANHANG



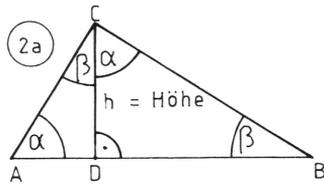
$\overline{AS'}$ muß = $\overline{BS'}$ sein,
kann beliebig groß,
muß aber größer als
 r sein!



Schreibweise: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

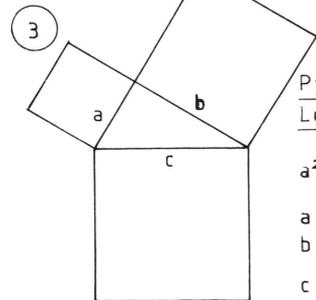
Bekannt sei z.B. \overline{AB} , \overline{BC} und $\overline{BC'}$

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B} : \overline{BC'} \quad \overline{A'B} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC'}}{\overline{BC}}$$



$h \perp \overline{AB}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADC \sim \triangle CDB$

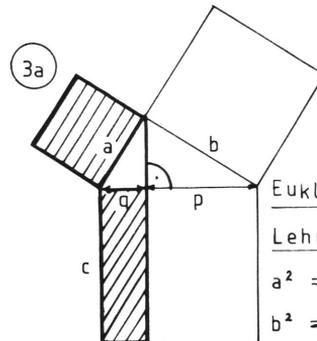


Pythagoräischer
Lehrsatz

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$\left. \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = \text{Katheten}$

$c = \text{Hypotenuse}$



Euklid'scher
Lehrsatz

$$a^2 = q \cdot c$$

$$b^2 = p \cdot c$$

ERLÄUTERUNGEN ZUM ANHANG

- (1) Der Kreis:
 M = Mittelpunkt (mitunter auch mit C bezeichnet)
 r = Radius oder Halbmesser
 d = Durchmesser (= 2 r)
 t = Tangente (steht senkrecht oder lotrecht auf dem Berührungsradius)
 u = Kreisumfang oder Peripherie ($u = 2 r \text{ mal } \pi$)
 b = Kreisbogen (Teil der Peripherie)
 A = Kreisinhalt ($A = r^2 \text{ mal } \pi$)
- (1a) Der Radius kann 6 mal an der Kreislinie abgetragen werden; es wird damit das regelmäßige *einbeschriebene* Sechseck gebildet. Alle Winkel des Bestimmungsdreiecks sind $= 60^\circ$. Die Seiten des *umbeschriebenen* Sechsecks (bzw. jedes regelmäßigen umbeschr. Vielecks) sind Tangenten (s. Abb. 1)
- (1b) Die Mittelsenkrechte läßt sich mit Zirkel und Lineal (also ohne Winkeldreieck auf zweifache Weise ziehen:
 aa) Mit unveränderter Zirkelöffnung: r 2 mal am Kreis abtragen und Schnittpunkte mit A und B verbinden; Mittelsenkrechte durch S und M ziehen.
 bb) Mit veränderter Zirkelöffnung: Sie muß größer als r sein
- (1c) Winkel werden im Gradmaß gemessen (od. im Bogenmaß)
 Die Winkelsumme im Vollkreis beträgt 360° (s. Abb. 1a)
 Die Winkelsumme in jed. beliebigen Dreieck $= 180^\circ$.
 Alle Winkel im *Halbkreis* sind rechte Winkel (90°)
- (1d) Alle Peripherie-Winkel, die auf gleicher Sehne bzw. auf dem gleichen Kreisbogen stehen, sind gleich groß.
 Zentri-Winkel, die mit Peripherie-Winkeln auf gleichem Kreisbogen stehen, sind doppelt so groß wie d. Periph.-W.
- (2) Sind mindestens 2 Winkel in verschieden großen Dreiecken gleich (zwangsläufig auch der 3.), wird von *ähnlichen* Dreiecken gesprochen. Alle Seiten des einen Dreiecks stehen im selben Verhältnis zu denen des oder der anderen (Dadurch kann die Länge unbekannter Seiten errechnet werden). Erläuterungen zum angeführten Beispiel: Äußere bekannte Glieder multipl. und durch bekanntes Gl. dividieren
- (2a) (Sehr wichtig!) Die Höhe (h) teilt ein rechth. Dreieck in zwei untereinander u. mit d. Ausgangsdreieck *ähnliche* Dr. (Die Höhe steht senkrecht auf der Grundfläche)
- (3) Pythagoräischer Lehrsatz: (Pythagoras = Griech. Philosoph im 6. Jh. v. Chr.) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der beiden Kathetenquadrate gleich dem Inhalt des Hypothenusenquadrats. Mit Hilfe dieses Lehrsatzes kann eine unbekannte Seite errechnet werden, wenn zwei Seiten bekannt sind. Beispiel: $a = 3 \text{ m}$ $b = 4 \text{ m}$, dann ist $c^2 = 25 \text{ m}^2$ bzw. $c = \text{Wurzel aus } 25 = 5 \text{ m}$. (Wie im Altertum, wird auch heutzutage noch mitunter der Grund für ein rechtwinkliges Bauwerk mit Schnüren entsprechender Längen abgesteckt.)
- (3a) Euklid'scher Lehrsatz: (Euklid = Griech. Math. um 300 v. Chr.) Das Kathetenquadrat ist gleich dem Rechteck, gebildet aus der Hypothe-

- nuse und der Projektion der Kathete auf die Hypothenuse. $a^2 = c \text{ mal } q$ ($q = \text{Projektion} = \text{Streckenabschnitt}$, gebildet durch rechtwinklig auf der Hypothenuse stehende, zur Spitze des rechten Winkels führende Gerade = Höhe).
- (4) Hökensatz (im rechtwinkligen Dreieck anwendbar):
Das Quadrat über der Höhe ist gleich dem Rechteck, gebildet aus den Hypothenusenabschnitten p und q
- (5) Parallele: Strecken laufen parallel, wenn der Abstand voneinander an allen Punkten gleich ist. (Mit dem Zirkel kann eine Parallele durch zwei- oder mehrmalige Abtragung eines gewünschten oder gegebenen Abstands erreicht werden; die Tangente der Berührungsradien ist die Parallele.)
- (6) Die Strecke AB soll z.B. in 5 gleiche Teile zerlegt werden: Man legt in A in beliebigem Winkel (möglichst aber um weniger als etwa 45°) einen Vektor an, auf dem man, von A aus beginnend, mit dem Zirkel 5 beliebig (aber angemessen) *gleich lange* Strecken abträgt, alsdann den Endpunkt der zuletzt abgetragenen Strecke mit B verbindet und Parallele zu dieser Strecke zieht.
(Bezüglich der Zehntel- oder Hundertstel-Teilung wird auf die Konstruktion des Verfassers - Abb. 19 - hingewiesen)
- (7) Winkelhalbierung: (Gegeben sei ein beliebig großer Winkel x). Zirkel mit angemessener Öffnung in A ansetzen und auf den Schenkeln abtragen. Von den erhaltenen Schnittpunkten erneut zwei gleich lange Strecken zur Bildung des Schnittpunktes S abtragen. Die Strecke AS halbiert den Winkel.
- (7a) Für die Halbierung eines Zentriwinkels braucht der Zirkel nur an den Berührungspunkten des Winkels an der Peripherie angesetzt zu werden; denn alle Punkte auf der Periph. sind gleich weit vom Mittelpunkt des Kreises entfernt. Außer dem Winkel wird auch der vom Winkel begrenzte Kreisbogen geteilt!

LITERATURVERZEICHNIS

BEUTEL, E. (1933) Die Quadratur des Kreises 3. Aufl.
Verlag BG Teubner Berlin-Leipzig

COLERUS, E. (1939) Vom Einmaleins zum Integral
Paul Zsolnay Verlag
Berlin/Wien/Leipzig

SIMON, M. (1906) Über die Entwicklung der Elementar-
Geometrie im XIX. Jahrhundert
Leipzig

STRUBECKER, K. (1963) Berechnung von π auf 100 000 Dezimale
Phys. Blätter S. 111 - 115

MNU (Zeitschrift für Math. u. Naturw.)
Der mathematische und naturwissenschaftliche
Unterricht Band 5 und 16

GRAPHIKEN vom Verfasser