

Über den hexagonalen Schnee

Von Johannes Kepler,
Seiner Kaiserlichen Majestät Mathematiker.*)

Ein Neujahrsgeschenk

an den berühmten Hofrat Seiner Kaiserlichen Majestät, Herrn Johannes Matthaeus Wackher von Wackenfels, goldenen Ritter etc., Förderer der Wissenschaften und der Philosophie, meinem Herrn und Wohltäter.**)

Frankfurt am Main, anno 1611,
bei Gottfried Tampach.

Aus dem Lateinischen übersetzt und bearbeitet von H. Strunz und H. Born, Berlin.
Mit 15 Abbildungen im Text und 4 Tafeln.

Da ich weiß, wie sehr Du das Nichts liebst, nicht wegen seines geringen Wertes, sondern ganz wie das witzige und zugleich anmutige Spiel der frechen Spatzen, so ist es mir leicht zu erraten, um wieviel lieber und willkommener Dir ein Geschenk sein wird, je mehr es dem Nichts nahekommmt.

Was es auch sei, was Dich zu irgendeiner Überlegung reizen könnte, das Geringfügige, das allzu Geringfügige, das Wertlose oder keineswegs Haltbare, es muß tatsächlich geradezu Nichts sein. Du denkst vielleicht an eines der Atome EPIKURs¹⁾: gewiß, das ist Nichts! — Wir versuchen mit einem Nichts zu beginnen, indem wir die Elemente durchgehen und nach dem Kleinsten suchen, das in jedem Gegenstand enthalten ist.

Zunächst zur Erde. Doch träume mir nicht von den Schätzen eines ARCHIMEDES, der die Erde in Staubkörnchen zerlegt hat, von denen 10 000 auf einen Mohnsamen gehen, und von denen der Verlust eines einzigen gewiß seine Myriadenberechnungen zunichte machen würde.²⁾ Die Gestalt dieser Körperchen ist nicht bekannt, auch Archimedes hat sie nicht verraten, und so erwecken sie nicht den Geist, nicht die Begierde nach einer unbekanntem Sache. Zudem ist Staub ein gar beständig Ding, denke an die altersmorschen Balken. Zuviel würde ich geben, wenn ich ihn Dir gäbe.

Sodann zum Feuer. Seine Fünkchen, obschon klein und flüchtig, sind doch nie kleiner als die Splitter der Feuersteine, die beim Zusammenschlagen abgespalten werden, auch nicht kleiner als die Asche der glühenden Kohlen, also hier abzulehnen wie der Staub. PLATO's „figurales pyramidas“ der vier Elemente habe ich nie gesehen, ich überlasse sie ihm, mag er damit Feuer machen wie er will.³⁾

Kommen wir nach dem schweren Element der Erde und dem leichten Element des Feuers zu den beiden, die dazwischen liegen.

Ich könnte Luft Dir schenken, ich meine Wind und Rauch; doch diese kann man kaufen, zwar nicht in isländischen Schläuchen,⁴⁾ sondern in Wort und Schrift, und das

*) Johannes Kepler, geboren am 27. Dezember 1571 zu Weil der Stadt in Württemberg, gestorben am 15. November 1630 zu Regensburg.

***) Johannes Matthaeus Wackher, geboren 1550 zu Konstanz am Bodensee, gestorben 1619 zu Wien; 1594 geadelt, vom Papst mit der goldenen Gnadenkette und dem Orden des heiligen Petrus ausgezeichnet. Lernte Kepler vermutlich 1601 in Prag kennen, wurde 1604 Pate seines Sohnes Friedrich.

weit auf der ganzen Erde. So ist der Rauch ein kostspielig Ding, für mich viel zu teuer. Zudem, da ohne Gestalt und Form, für eine geistreiche Betrachtung ungeeignet.

Wollen wir uns schließlich zum Wasser niederbeugen. Den Tropfen in der Wein- karaffe halten hochheilige Priester für etwas sehr Verächtenswertes. Und uns Deutschen mißfällt nichts mehr, als der Tropfen, welcher, nachdem der Becher leer, auf den Fingernagel gegossen, zur Probe kleben bleibt. Wenn ich also diesen Tropfen gebe, gebe ich gewiß weniger als jener Perser, der seinem König aus der hohlen Hand das Choaspes- wasser dargeboten hat.⁵⁾ Immerhin wäre der Tropfen, der vom Nagel eines Deutschen kommt, ein passenderes Geschenk, als der abgeknabberte Splitter vom Nagel eines un- wirschen und selbst das Kleinste verweigernden Italieners. Schließlich verspricht die kugelige Form des Tropfens eine geometrische Untersuchung, doch werde ich mich auch davor hüten, vielleicht ist er Dir nicht klein genug, der Du an einem Nichts am meisten Freude hast.

Aber was, wenn wir zum Tierreich übergehen? Ich fürchte, ich trage damit Eulen nach Athen. Neulich nämlich sah ich bei Dir Bände über einzigartige und seltene Dinge von dem, der nach der alten Lehre des PARMENIDES⁶⁾ die Bewegung leugnet, weil bei ihr ein vollendeter Teil (das Vergangene nämlich) nicht vorhanden sei. Da in diesem Werk viele ungeheuerliche Tiere verzeichnet sind, glaube ich auch nicht, daß die winzigen Tierchen fehlen werden, die wegen ihrer Saft- und Kraftlosigkeit wunderbarlich sind. Vermutungen anzuführen aber, ist nichts wert. Du hast die Beobachtungen des SCALIGER^{7a)} in den „Subtilitäten“ des CARDANUS.^{7b)} Du findest dort in der 194ten Übung unter Num- mer 7 das kleinste Tier: Cuniculum subcutaneum. Aber auch das ist noch zu groß. Denn das Tierchen kriecht umher und entbehrt nicht der Seele. Warum soll ich Dir also eine Seele bieten, wenn ich schon einen seelenlosen Tropfen zu geben ablehne? Du kannst auch kaum hoffen, in der zerschnittenen Leiche dieses schmarotzenden Tieres etwas Neues zu finden: Hierüber wird D r. J e s s e n , der Anatom, Untersuchungen angestellt haben.⁸⁾

Während ich derartiges ängstlich erwäge, gehe ich über eine Brücke, verwirrt über meine Unhöflichkeit, der ich Dich ohne Neujahrs Geschenk gelassen hätte, weil ich immer ein Nichts anbiete, indem ich stets dieselbe Leier drehe, aber nicht finde, was dem Nichts am nächsten kommt, und was die Schärfe des Geistes zuließe. Da passiert durch Zufall folgendes, daß durch die Wasserdämpfe, die durch die Kraft der Kälte zu Schne e gefrieren, weiße Flocken auf meine Kleidung fallen, alle sechseckförmig und mit gefie- derten Strahlen.⁹⁾ Ei ja, beim Herkules, ich habe ein Ding, das kleiner ist als irgendein Tropfen, und das doch eine Form besitzt, ei, welch höchst erwünschtes Neujahrs Geschenk für einen, der das Nichts liebt, und das wert ist, daß es gerade ein Mathematiker schenkt, der ja nichts hat und nichts bekommt, und das dennoch vom Himmel herab fällt und die Ähnlichkeit der Sterne an sich trägt.

Ich muß zu meinem Herrn und Beschützer zurückkehren, solange das kleine Neu- jahrs Geschenk noch bestehen bleibt, damit es nicht durch den warmen Körperdunst in ein Nichts vergeht.

Und sieh' da, welch bedeutsamer Name. O Ding, das für WACKHER, der Nichts liebt, äußert genehm ist. *Nam si a Germano quaeras Nix quid sit, respondebit Nihil, siquidem Latine possit.*¹⁰⁾

Nimm daher das Ding, das dem Nichts nahe kommt, mit heiterer Miene, und halte den Atem an, wenn du klug bist, damit du schließlich nicht doch Nichts hast.

Man muß nämlich mit SOKRATES über das Flohspringen reden¹¹⁾: das heißt hier, warum der Schnee beim ersten Fallen, bevor er sich zu größeren Flocken vereinigt, stän- dig weiterfällt, sechseckig mit sechs Strahlen wie die kleinen Federchen.

Soll sich ARISTOPHANES, der Verführer des Volkes zu Gleichgültigkeit und Un- verstand nur schnell fortschren. Was brauche ich SOKRATES? Was soll ich mit dem Stoff seiner Fabeln? Ich sehe mich lieber nach dem königlichen Psalmensänger um, der

unter Gottpreisungen erwähnt, es gebe Schnee wie Wolle,¹²⁾ womit er, wenn ich mich nicht irre, jene gefiederten Strahlen meiner Schneeflöckchen meint. Es ist nämlich wahrscheinlich, daß er, als er einmal ermüdet dasaß oder bei der Hut der Schafe auf seinen Hirtenstab gestützt stand, gesehen und bemerkt hat, wie die kleinen Sternchen in die Wolle der Schafe fielen und dort hängen blieben.

Aber Scherz bei Seite, kommen wir zur Sache; da es immer so ist, sooft es zu schneien beginnt, daß jene ersten Schneeteilchen die Form von sechseckigen Sternchen an sich haben, muß da ein bestimmter Grund vorliegen. Denn wenn es durch Zufall geschähe, warum fallen dann nicht in gleicher Weise Fünfecke oder Siebenecke, warum denn immer Sechsecke, sofern sie noch nicht ineinander verfilzt sind und aus gleich welchem Grunde zu einer Häufung zusammengeklebt sind, sondern spärlich und getrennt?

*Die kleinen
Schnee-
sternchen*

Als ich hierüber neulich mit einem anderen eine Aussprache hatte, kamen wir zunächst überein, daß der Grund nicht im Material zu suchen sei, sondern in dessen Wirken. Denn der Grundstoff des Schnees ist Nebel. Solange dieser aus der Erde steigt, indem er durch seine Wärme hinaufgeführt wird, ist er nichts anders als zusammenhängend und gewissermaßen flüssig. Er ist jedenfalls nicht in einzelne Sternchen dieser Art unterteilt.

Du fragst, woher ich das weiß? Denn wenn auch Wasserdampf so wäre, könnte er mit Augen nicht gesehen werden, weil er doch durchsichtig ist? Ich antworte: Der Dunst entsteht aus der Auflösung einer unterirdischen Flüssigkeit, was sich aus seinem geringen Gewicht und der Tatsache, daß er aufsteigt, erhellt. Bei dessen Auflösung aber haben die Figuren keinen Platz. Denn nur das hat von sich aus eine Form, was sich durch sich selbst begrenzt, da die Grenzen die Form bilden. Der Dunst, der aus der Auflösung entstanden ist, ist von der Art der feuchten Stoffe und er ist flüssig, das meint, er begrenzt sich nicht selbst und hinterläßt auch keine Form, solange er nicht zu Schnee oder zu einem Tropfen kondensiert wird.

Da es also feststand, daß der Grund der sechseckig geformten Figur bei dessen Wirken liegt, war ferner in Erwägung zu ziehen, was denn da wirke, und wie es wirke, ob es angeborene Form sei oder von außen her wirke. Ob es die sechseckige Figur aus einer Notwendigkeit des Materials bewirke oder aus ihrer Natur, der entweder der Urtyp der Schönheit, die in einem Sechseck liegt, angeboren ist, oder ein Wissen um das Ziel, zu dem diese Figur führt?

Damit eine Entscheidung über diese Fragen gefällt werde, wollen wir bekannte Beispiele wählen, jedoch in geometrischer Weise beschriebene. Denn für unsere Fragestellung ist dieser Exkurs von großem Nutzen.

Wenn Du einen Mathematiker fragst, nach welcher Ordnung die Bienenwaben gebaut sind, dann werden sie antworten, nach sechseckiger. Die Antwort ist einfach, sie ergibt sich aus der bloßen Betrachtung der Öffnungen und Tore und der Bausteine, mit denen die Waben gebaut sind. Jede einzelne Wabe umstehen nämlich sechs andere, die sich jeweils durch eine Wand in der Mitte vereinen. Wenn Du aber die Böden der betreffenden Waben betrachtest, wirst Du drei Ebenen unter einem stumpfen Winkel zusammentreten sehen. Sechs andere Winkel verbinden diesen Boden (du nennst ihn vielleicht besser Kiel oder First) mit den sechs Wabenwänden; die drei oberen sind dreikantig, völlig ähnlich dem mittleren Firstwinkel,^{13a)} die drei unteren vierkantigen liegen dazwischen. Außerdem ist noch in Betracht zu ziehen, daß die Wabenreihen zweifach sind, mit jeweils von einander abgewandten Eingängen, aber mit eng aneinanderliegenden Rückseiten. Die

*Die Waben
der Bienen*

*Die regel-
mäßigen
rhombischen
Körper*

Winkel der einzelnen Kiele der einen Reihe sind dergestalt in die drei Winkel der drei Kiele der anderen Reihe eingepaßt, daß sich jede Wabe nicht nur auf sechs Seiten mit sechs Wabenzellen, die in derselben Reihe darumstehen, vereinigt, sondern auch durch die drei Ebenen am Boden mit drei weiteren Waben aus der anderen Reihe. So kommt es, daß jede Biene neun Nachbarinnen hat, von der sie jeweils durch eine gemeinsame Wand getrennt ist.^{13b)} Die drei Bodenebenen sind untereinander alle ähnlich und von der Gestalt, die die Mathematiker Rhombus nennen. Auf die Rhomben aufmerksam geworden, begann ich in der Geometrie nachzusuchen, ob ein Körper, ähnlich wie die fünf regelmäßigen und die archimedischen vierzehn, aus reinen Rhomben erstellt werden könnte. Ich habe zwei gefunden, von denen der eine dem Würfel und Oktaeder verwandt ist und der andere dem Dodekaeder und Ikosaeder (denn der Würfel ist selbst der dritte Körper dieser Art, er ist mit zwei Tetraedern verwandt, die entgegengesetzt zueinander liegen). Der erste wird durch zwölf, der andere durch dreißig Rhomben umschlossen.¹⁴⁾ Der erste aber hat folgende Eigentümlichkeit mit dem Würfel gemein: *Wie die acht Ecken von je acht Würfeln, die um einen Punkt zusammengestellt sind, allen Platz ausfüllen, ohne einen freien Raum zu lassen, so tut der erste rhombische Körper dasselbe mit vier stumpf-winkligen dreikantigen Ecken und ähnlich mit sechs vierkantigen Ecken. So kann aus diesen reinen Rhombenkörpern ein fester Raum gebildet werden, so daß immer vier dreiseitige Winkel sowie sechs vierseitige Ecken in einem und demselben Punkt zusammenstoßen.*¹⁵⁾ Und damit ein Resultat daraus gezogen wird: wenn ein fester Raum mit gleichen Würfeln in der rechten Weise ausgefüllt wird, dann berühren einen Würfel die anderen mit jeweils zweiunddreißig Ecken und außerdem sechs mit vier Ecken, so daß das zusammen 38 Würfel (richtig 26 Würfel, Anm. d. Bearb.) sind. Wenn aber ein fester Raum mit gleichen rhombischen Körpern gefüllt wird, dann berühren den einen die anderen mit jeweils sechs vierkantigen Ecken und außerdem 12 mit je vier Ecken, so daß auf diese Weise die Gesamtzahl (der berührenden rhombischen Körper) 18 macht.

Dies ist also jene geometrische Figur, die nächst den regelmäßigen einen festen Raum füllen kann, wie auch das Sechseck, das Viereck und das Dreieck die Ebene bedecken. Dies ist auch, wie gesagt, die Figur, die die Bienen für ihre Waben bauen. Wobei ich nur in Abrechnung stellen muß, daß die Bienenwaben keine Dächer haben, die den Böden ähnlich wären.

Würden sie nämlich auch das noch hinzufügen, und läge so jede Biene zwischen 12 oder 18 versteckt, dann stünde ihr, die ringsherum eingeschlossen ist, kein Ausgang offen. Daher dürfen sie keine Dächer haben. Nichts steht aber im Wege, daß sie nach Maßgabe ihres kleinen Körpers sechs Wände herstellen, die über das rhombische Maß des Bodenkiels hinausreichen, und diese, den anderen ganz unähnlich, in entgegengesetzte Richtung bauen.

*Welche Form
haben die
Granat-
apfelkerne?*

Wenn ferner jemand einen größeren Granatapfel öffnet, dann wird er sehen, daß die meisten Kerne in derselben Figur geprägt sind, sofern das nicht eine Reihe von Fasern hindert, durch welche ihnen ihre Nahrung zugeführt wird.

Schon bei diesen beiden Beispielen fragt man sich, wer der Urheber der rhombischen Figur in der Wabe der Bienen sei oder in den Kernen des punischen Apfels. In der Materie liegt der Grund nicht. Denn nirgends finden die Bienen solcherlei rhombische Blättchen im voraus vor, die die Bienen

sammeln und für den Bau ihrer kleinen Wohnungen zusammenfügen könnten. Und es ist auch nicht wahrscheinlich, daß allein in den Granatäpfeln die Kerne von sich aus eckig wachsen, zumal sie in allen anderen Früchten rund hervorwachsen, was allerdings nicht hindert, daß sie anschwellen und gegebenenfalls Beulen bilden, wenn die angelieferte Flüssigkeit die zähen Schalen füllt und vollstopft. Daher liegt der Grund für die Form im Falle des Kerns des punischen Apfels in der Seele der Pflanze, welche für das Wachstum der Frucht sorgt. Sie aber ist nicht hinreichender Grund für die Form, und sie tut das auch nicht für die Frucht aus einer formalen Eigenart heraus, sondern wird dabei noch von einer Notwendigkeit, die aus dem Material kommt, unterstützt. Denn während die Kerne anfangs, da sie noch klein sind, und solange ihnen der Raum innerhalb der Schale hinreicht, rund sind, wird ihre Zusammendrängung und -pressung durch die sich erhärtende Schale, während die Kerne beständig weiterwachsen, vorgenommen. Genau wie die der Erbsen in ihren langen Schoten. Die Erbsen aber haben keinen Platz, wohin sie ausweichen könnten. Sie sind nämlich in ihren länglichen Schoten in einer Reihe angeordnet, daher werden sie nur von zwei Seiten gepreßt. Die punischen Äpfel aber haben von Anfang an einen größeren Raum erhalten. Es reiht sich daher leicht einer, indem er sich vordrängt, zwischen drei aus der anderen Reihe ein, wobei er durch seine runde Form noch unterstützt wird. Die Flüssigkeit drängt er darauf fort, wo er hindringt, fort in den freien Raum. *Wenn jemand eine bestimmte Menge runder Kugeln, die untereinander gleich sind und aus einem nachgiebigen Material, in ein rundes Gefäß schließt, und dies darauf mit eisernen Reifen umschließt, und es dann von allen Seiten zusammenzudrücken beginnt, dann werden die meisten Kügelchen zu rhombischen Formen gepreßt, besonders, wenn du vorher durch kluge Erschütterungen dieses Gefäßes die Kügelchen durch freie Drehung auf einen engen Raum gebracht hast. Bei einer geradlinigen Anordnung der Kugeln, die nicht in Unordnung gebracht werden kann, schaffst du dagegen durch die Kompression Würfel.*

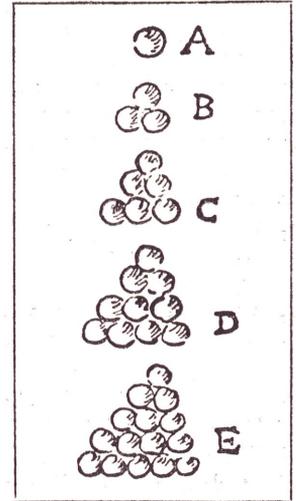
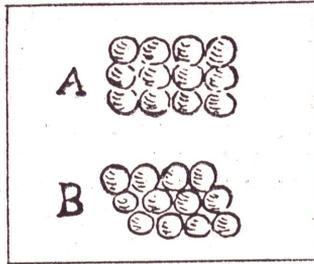
Welche Form bilden die Erbsen?

Im allgemeinen nämlich ordnen sich gleiche Kugeln, die in irgendeinem Gefäß gesammelt sind, auf zwei Arten, gemäß zwei Arten ihrer Anordnung in jeder Ebene.

Denn wenn Du auf einer horizontalen Ebene herumirrende gleiche Kügelchen eng zusammenlegst, so daß sie sich gegenseitig berühren, dann passen sie sich entweder zu dreieckiger Form zusammen oder zu viereckiger. Dort stehen sechs um eine, hier vier. In beiden Fällen ist die Art der Berührung die gleiche für alle Kugeln, ausgenommen die äußeren. Die Form des Fünfecks kann keine Gleichheit schaffen, das Sechseck kann in Dreiecke aufgelöst werden: So gibt es, wie ich gesagt habe, nur zwei Anordnungen.

Wenn Du nun zur Konstruktion möglichst festgefügtter Körper schreitest, indem Du Schicht auf Schicht von ebenen Kugelanordnungen aufeinanderbaust, so werden entweder Quadrate (A) oder Dreiecke (B) entstehen. Wenn es Quadrate sind, dann stehen entweder die einzelnen Kugeln der oberen Reihe genau über den Kugeln der unteren Reihe, oder aber die Kugeln der oberen Reihe sitzen im Gegenteil zwischen jeweils vieren der unteren Reihe. Nach der ersten Art wird jede Kugel von vier darumgelagerten auf derselben Ebene berührt, ferner von einer über ihr und von einer unter ihr. Und so zusammen von sechs anderen. Dies wird eine kubische Anordnung sein, und nach einem Zusammendrücken werden Würfel entstehen. Das ist aber nicht die dichteste Lagerung. Nach der zweiten Art wird jede beliebige

Kugel außer von den vier herumliegenden in derselben Ebene noch von vieren unter ihr und vieren über ihr berührt. So wird sie im ganzen von zwölf Kugeln berührt. Unter Druck entstehen aus den Kugeln rhombische Körper. Diese Anordnung ähnelt sehr dem Oktaeder und der Pyramide. Die Zusammenballung ist die dichteste: so daß auf keine andere Art mehr Kügelchen in demselben Gefäß erfaßt werden können. Wenn hinwiederum die Zeilen auf der Ebene dreieckig angeordnet werden, dann stehen bei einer



räumlichen Einteilung entweder die einzelnen Kugeln der oberen Reihe über denen der unteren, und zwar wiederum in der weiten Anordnung, oder die der oberen sitzen zwischen denen der unteren. Nach der ersten Anordnung wird jede Kugel von sechs herumlagernden aus derselben Ebene berührt, von einer über ihr und einer unter ihr und so zusammen von acht anderen. Die Anordnung ähnelt dem Prisma, und nach einer Kompression entstehen anstelle der Kügelchen Columnen mit sechs viereckigen Seiten und zwei sechs-eckigen Basen. Auf die zweite Art ergibt sich dasselbe wie vorher auf die zweite Art der viereckigen Anordnung. — (B) soll nämlich eine Gruppe dreier Kugeln sein. Lege ihr (A) als Spitze auf. (C) soll eine andere Gruppe von sechs Kugeln sein, eine andere (D) mit zehn Kugeln, wieder eine andere mit 15 Kugeln (E). Nun lege jeweils die kleinere auf die größere, so daß eine Pyramidenform entsteht, und obschon so die jeweils höhere Kugel zwischen drei darunterliegenden sitzt, so werden doch, nachdem Du die Figur auf die Seite gelegt hast, so daß nun nicht mehr die Spitze, sondern eine unverkehrte Seite an höchster Stelle steht, die vier darunterliegenden in quadratischer Anordnung stehen, sooft du eine Kugel aus dem Ganzen herausnimmst. Und wieder wird genau wie früher eine Kugel von zwölf anderen berührt werden, nämlich von sechs darumliegenden auf derselben Ebene und dreien darüber und dreien darunter. So kann in der festest gefügten Zusammenballung keine dreieckige ohne viereckige sein und umgekehrt.¹⁶⁾ Daraus geht hervor, daß die Kerne des punischen Apfels aus Gründen des Materials, wie aus der Überlegung des Wachstums der Kerne vor sich geht, in die Form

des rhombischen Körpers gepreßt werden. Da die runden Kerne nicht dauernd ohne Veränderung ihrer Oberfläche von verschiedenen Seiten aufeinander lasten können, sondern vertrieben werden und weichen, treiben sie sich in die freien Zwischenräume zwischen drei oder vier andere Kerne.

Der Grund für die Form bei den Kernen des punischen Apfels

In den Bienenwaben aber liegt ein anderer Gesichtspunkt vor. Denn die Bienen häufen sich nicht ungeordnet an, wie die Kerne im Apfel, sondern sie bilden nach Gutdünken eine Reihe, indem sie alle mit den Köpfen in die eine oder andere Richtung blicken, und indem alle Bienen sich mit ihren Rückseiten gegenseitig aufeinander stützen. Wenn aber die Figur aus einer Zusammenballung dieser Art entstände, dann wäre es nötig, daß die Waben von den Bienen ausgeschwitzt würden, so daß sie von dem festen Stoff umhüllt sind, so wie die Häuser der gewundenen Schnecken über ihnen zu wachsen pflegen. Es ist aber sicher, daß die Bienen sich ihre Waben selbst herstellen, und das ganze zusammenhängende Gebäude von Grund auf errichten.

Woher kommt die Form der Schneckenhäuser?

Deswegen hat die Biene in ihrer Anlage von Natur aus einen Instinkt, daß sie in dieser Form am ehesten bauen kann. Dies Urbild ist ihr vom Schöpfer eingepflanzt worden: Nichts macht hier das Material aus, nichts das Wachs, nichts das Körperchen der Biene und nichts das Wachstum.

Der Grund der Figur in den Bienenwaben

Nach dieser Feststellung muß man ferner auch nach dem Zweck fragen, nicht den, den die Biene selbst durch ihr Verfahren verfolgt, sondern den Gott selbst, der Schöpfer der Biene vor Augen hatte, als er der Biene diese Gesetze beim Bauen vorschrieb.

Und hier schließlich beginnt, bei der Bestimmung des Zweckes, die Betrachtung der Körper und des Materials. Dreierlei kann nämlich über diesen Zweck gesagt werden. Das erste ist bei den Physikern, die nur eine sechseckige Form betrachten, wie sie sich mit den Öffnungen von außen her zeigt, allgemein bekannt. Da eine Ebene, ohne einen freien Raum zu lassen, nur folgende Figuren füllen, das Dreieck, das Viereck und das Sechseck, ist unter ihnen das Sechseck die Figur, die am meisten Platz bedeckt. Um ihren Honig unterzubringen, schaffen sich die Bienen so den größten Raum.

Die Form des Sechseckes gewährt viel Raum

Danach kann also diese Überlegung auch bei der Betrachtung des Raumes benutzt werden, und zwar folgendermaßen: Da der feste Raum nicht ohne daß eine Lücke bleibt, ausgefüllt werden kann, es sei denn von Würfeln und rhombischen Körpern, so nehmen die rhombischen Körper einen größeren Platz ein, als die Würfel. Diese Überlegung reicht aber nicht aus. Denn wenn die Bienen Fassungsvermögen wollen, *warum baut sich nicht jede ein rundes Nest*, warum ist es nötig, auch den kleinsten Raum zu unterteilen, wie wenn in der ganzen Wabe kein anderer Platz mehr sei? Jener andere Grund wäre wahrscheinlicher, obschon auch er nicht wegen der genannten Überlegungen hinreicht, *weil die kleinen zierlichen Körperchen der jungen Bienen bequemer in einem Nest von der Form abgestumpfter Winkel, die einem Kreisbogen nahekäme, liegen, als in einem Kubus*, der wenige und weit spitzere Ecken hat, und dazu einen ebenen Boden, der für einen runden Körper unzuträglich ist.

Darum muß man wohl noch den dritten Grund hinzuziehen: Es wird ihre Arbeit verringert, wenn immer zwei Bienen eine gemeinsame Wand bauen, und der ebene Tafelbau gibt eine größere Festigkeit, um das Flechtwerk unversehrt zu erhalten, wie wenn die einzelnen Zellen rund wären und somit leichter zu zerdrücken. Schließlich klaffen runde Körper, auch wenn sie noch so eng aneinander gebaut sind, auseinander: So kann

Der wesentliche Grund der rhombischen Form in den Bienenwaben

Kälte in die Lücken eindringen. Für alle ist gesorgt, weil sie gemeinsame Häuser in ihren Städten haben, wie Virgil singt.

Diese Überlegungen, die auch auf die Notwendigkeit des Materials Rücksicht nehmen, halte ich für hinreichend, so daß ich nicht glaube, über die Vollendung, die Schönheit und den Adel der rhombischen Figur philosophieren zu müssen. Auch schert es mich nicht, wie das Wesen der kleinen Seele, die in der Biene ist, aus der Betrachtung der Figur, die sie baut, abgelesen werden kann.

Dasselbe gilt auch für den punischen Apfel. Es zeigt sich ein Zwang, der im Material begründet liegt, der die Kerne in eine rhombische Form drängt, während sie langsam anwachsen. Daher ist es hinfällig, über das Wesen der Seele, die in diesem Baume ist, und die diesen rhombischen Körper am ehesten beeinflusst, nachzugrübeln.

Der Grund für die Fünfzahl bei den Blütenblättern

Wenn im Gegenteil die Frage aufgeworfen wird, *warum alle Bäume und Sträucher (zumindest jedoch sicher die Mehrzahl) einen fünfstrahligen Blütenstand ausbilden*, das heißt eine Blüte mit einer Fünfzahl von Blütenblättern; dieser Blüte folgt auch bei den Äpfeln und Birnen der Aufbau der Frucht in derselben Fünfzahl oder in der verwandten Zehnzahl: Fünf Zellen sind eingelagert, um den Samen zu bergen und zehn Zellenwände, was auch bei Gurken und anderen Früchten dieser Art vorkommt. Wenn das gefragt wird, *dann sage ich, hier wäre eine Untersuchung der Schönheit und Eigentümlichkeit der Figur am Platze, welche die Seele dieser Pflanzen geprägt hat*. Und nebenbei will ich meine Gedanken hierüber verraten.

Die regelmäßigen Körper, die unter Anwendung der Fünfzahl aus den göttlichen Proportionen entstanden sind

Es gibt zwei regelmäßige Körper, das Dodekaeder und das Ikosaeder, von denen dieses gänzlich durch Fünfecke gebildet wird, das andere freilich durch Dreiecke, die aber in Fünfeckform aneinanderliegen. Der Bau beider Körper, besonders aber der des Fünfecks selbst kann nicht ohne jene Proportion, die die heutigen Mathematiker die göttliche nennen, vorgenommen werden. Diese aber ist so angelegt, daß die zwei kleineren Glieder einer fortlaufenden Proportion zusammen die dritte ergeben, daß immer die beiden letzten addiert die darauffolgende ergeben. Ein abgeschlossenes Zahlenbeispiel zu bieten ist unmöglich. Je weiter wir uns doch von der Einzahl fortbewegen, umso vollendeter wird das Beispiel. Die kleinsten Zahlen seien 1 und 1, die Du Dir ungleich vorstellen mußt. Zähle sie zusammen, das ergibt 2, ihr zähle die größere 1 hinzu, das ergibt 3. Zähle 2 hinzu, ergibt 5, plus 3 macht 8. Zähle 5 hinzu, macht 13, plus 8 ergibt 21. So verhalten sie immer 5 zu 8, wie etwa 8 zu 13 und 8 zu 13 wie etwa 13 zu 21.¹⁷⁾

Ähnlich zu dieser sich selbst fortsetzenden Proportion ist, wie ich glaube, die Möglichkeit der Zeugung fixiert. Und so wird in der Blüte der Möglichkeit zur Vermehrung ein reines fünfeckiges Fähnchen vorangetragen. Lasse alles andere, was zur Bekräftigung dieser Sache in erfreuender Betrachtung noch hinzugefügt werden könnte. Hierfür bedürfte es eines besonderen Platzes. *Jetzt haben wir das nur des Beispiels wegen vorausgeschickt, damit wir bei der Erforschung der Sechseckfigur des Schnees umso besser unterrichtet und geübt sind*.

Ob die Kälte der Grund für die Sternchenform im Schnee ist?

Als wir uns nämlich vorgenommen hatten, den *Ursprung der Sechseckform des Schnees* an den äußeren und inneren Gründen zu untersuchen, da bot sich unter den äußeren als erste die Kälte an. Die Kondensation entsteht gewiß durch die Kälte. Durch die Kondensation aber geht der Dunst zur Form des Sternes über. Es schien also, daß die Kälte jene sternförmige Figur bewirke. Darauf müssen wir zu einer anderen Überlegung übergehen,

ob denn die Kälte von Natur aus etwas sei, wie die Wärme der Mediziner. Sie schien mir nämlich nur etwas zu sein, was der Wärme beraubt ist, was somit keinen Geist hat und auch nicht die Erzeugerin der Sechseckform ist, sondern gänzlich ohne eigenes Wirken ist.

Damit wir aber die Fragen nicht vermischen, soll die Kondensation der Kälte Werk bleiben. Wie es schien, konnte aber eine Kondensation zur Kugelform eher eintreten. Wenn man aber die Kälte als weit ausgedehnt betrachtet, und den Nebel, wie wenn er sie an der Außenseite berührt, dann ist es verständlicher, daß die Kondensation zu einer völlig flächigen Form vor sich geht, ähnlich seiner Oberfläche, und zwar in den jeweiligen Grenzen. Stell Dir vor, die ganze äußere Oberfläche des Nebels würde durch die Kälte kondensiert, es entstünde aus der Kondensation ein Gewicht, aus dem Gewicht ein Fallen und aus dem Fallen eine Auflösung in lauter kleine Bröckchen und Blättchen: Ich weiß nicht, ob dann alle diese kleinen Bröckchen, gewiß jedenfalls nicht die wenigsten, ich weiß nicht, ob überhaupt welche, sechseckig ausfallen, besonders aber die mit den reizvoll gestreiften Strahlen könnten so nicht entstehen.

Diese Streifen erinnerten an den Vorgang, der in den Dampfbädern vor sich geht, wenn Eiskälte durch zerbrochene Fenster eindringt. Denn sooft sie sich berühren, steigt die Wärme aufwärts, die Kälte aber sinkt nieder. An diesen Engpässen geraten die kalte Luft und der warme Dunst aneinander. Im Warmen nämlich geht eine Ausdehnung der Materie vor, im Kalten eine Zusammenziehung und eine Gewichtszunahme, und das treibt das Warme nach oben. Wenn der Dampf daher mit einemmal hinaus zu gelangen sucht, tritt eine Flucht vor der Leere ein, so daß auch die kalte Luft mit einem Schub einbricht, weswegen die Ränder eines offenstehenden Fensters am kältesten werden, oder die Ritzen. Der Dampf, der zu diesen Rändern gelangt, gefriert ständig. Und so entsteht an diesem Material allmählich Kälte, die groß genug ist, daß all der Dampf, der noch an diesen Reif heranlangt, selbst gefriert in einer ständigen Fortsetzung, während sich die Kälte, die dazwischentritt, auf geradem Wege Eintritt verschafft. Aus dieser Abwechslung des Ein- und Hinausfahrens entstehen jene Streifen und spitzen Strahlen des Reifs, der sich aus Dunst zusammensetzt.

Bisher kann aber freilich nichts über die Entstehung der Form unseres Schneeflöckchens gesagt werden. Denn welches Hinein- und Hinaustreten gibt es denn in den sehr weiten, luftigen Gefilden, welche Engpässe, und welchen Widerstreit? Ich will gern eingestehen, daß beim Fallen aus der Höhe durch die dunstige Luft eine Anlagerung von umgebendem Dunst an die Strahlen vor sich geht. Aber warum an sechs Stellen, warum denn das Prinzip der Sechszahl? Wer hat das kleine Mittelstück, bevor es zu fallen begann, in sechs gefrorene Hörner ausgebildet? Welcher Grund legt an der Oberfläche, die sich erst noch kondensieren soll, sechs Punkte an, an die rundherum sechs Strahlen angefügt werden können?

Da also die Kälte, die äußere Ursache, das nicht bewirken kann, muß da noch eine innere liegen, eine, die eine Begleiterscheinung des Dunstes ist, oder eine ihm auf irgendeine andere Weise eigentümliche.

Aber den, der das erwägt, kommt ein Wundern an, warum die Strahlen nicht besser kreisrundherum angeordnet waren? Warum wirkt sie nur in so dünner ebener Schicht, wenn die Kälte der Urheber dessen ist? Die sich doch in jeder Schicht gleich verhält, und gewiß nicht nur auf der ebenen Oberfläche des Dampfes?

*Welcher
Grund gilt
für die
Reiffiguren
an den
Fenstern?*

*Die Meinung
vom Nichts*

Während ich mich mit solchen Überlegungen abmühe, und während der Verstand fordert, daß die Strahlen rings herum angeordnet sein müßten, da fällt mir ein, was ich bei anderen Gelegenheiten mit Bewunderung beobachtet habe, daß nämlich die Sternchen nicht im ersten Moment ihres Auffallens auf der Ebene platt liegen, sondern durch einige Teilchen hochgehalten werden, und dann erst nach einer gewissen Zeit platt hinfallen. Mit dieser Überlegung an Vaters und dieser Erfahrung an Mutters Stelle wurde in mir folgende Ansicht geboren: Diese Sternchen bestehen, während sie noch fallen, aus drei über Kreuz stehende Federstrahlen, die über Kreuz in einem Punkt zusammengefaßt sind, mit sechs im Kreise herum gleich angebrachten kleinen Gliederchen. Sowie sie nun nur mit drei gefiederten Strahlen auffallen, stehen die anderen drei (die die durch die Mitte gehenden gerade Fortführungen derer sind, die auffallen) in die Höhe, bis die verbogen sind, auf die sich das Sternchen stützte, und somit auch die anderen, die bislang noch in die Höhe ragten, auf die selbe Ebene mit den ersten sinken, und zwar in deren Zwischenräume.¹⁸⁾

Die Kraft dieser Annahme werde ich bei allem weiter verfolgen. Danach erst werde ich entscheiden, ob sie richtig ist, damit mich nicht die ungelegene Entdeckung ihrer möglichen Unbrauchbarkeit hindern kann, über ein nichtiges Ding Worte zu machen, was ich mir ja vorgenommen habe.

Diese Eigenschaft soll ihr zu Grunde liegen, ganz gleich welche auch die Ursache dieser sechs Strahlen sei, daß sie in gleicher Weise in alle Richtungen zerstreut ist. Wenn die Kälte der Grund der sechs Strahlen ist, dann muß sie also die einzelnen Teilchen des Dunstes in gleicher Weise umstehen, oder zumindest auf allen Seiten in gleichen Abständen. Wenn es aber eine innere Wärme ist, dann soll auch sie in alle Richtungen einer Kugel aus einem und demselben Mittelpunkt herauswirken.

So aber ist die Frage noch nicht besprochen, sondern nur umgestellt. Denn noch ist nicht ersichtlich, warum nicht fünf oder sieben, sondern immer nur sechs gefiederte Strahlen aus derselben Mitte entspringen.

Und wenn Du die Mathematiker fragst, in welcher Figur sich denn drei Diameter orthogonal oder in der Form eines doppelten Kreuzes im selben Punkte schneiden, dann werden sie antworten, im Oktaeder, wenn die gegenüberliegenden Ecken miteinander verbunden sind. Das Oktaeder hat nämlich sechs Ecken. Warum also geschieht es, daß der Schnee, solange er fällt und noch bevor er abgeplattet wird, mit drei gefiederten Diametern, die sich gegenseitig orthogonal schneiden, selbst das Skelett des Oktaeders nachbildet? So daß Du, wenn Du die benachbarten Enden der Strahlen durch zwölf Gerade verbindest, einen vollständigen Körper eines Oktaeders herstellen würdest?

Welcher Grund liegt also vor, daß die Kondensation eher in diesen drei gefiederten Strahlen eintritt, als in einer ganzen Kugel?

Ich kann zwar eine Art angeben, wie dies aus materieller Notwendigkeit erfolgt. Das aber schließt etwas ein, was wiederum mehr Bewunderung einflößt, als das, was zu beweisen ist. Ich will es doch sagen, damit vielleicht aus der Vergleichsmöglichkeit der vielen falschen Schlüsse die Wahrheit geboren wird. Es sei, daß der Dampf, sobald er die zuerst andringende Kälte spürt, zu Kügelchen einer bestimmten Größe erstarret. Das ist ganz eingänglich. Denn wie beim Wasser der Tropfen deswegen die kleinste natürliche Einheit einer Flüssigkeit ist, weil das Wasser wegen seines Gewichtes nicht weiter auseinanderfließt, sobald es unterhalb der Menge eines Trop-

fens bleibt, so kann auch leicht zugestanden werden, daß im Material des Wasserdampfes irgendeine Widerstandskraft steckt, mit der der Dampf der Kälte widerstehen kann, und das in einem bestimmten Ausmaß. Nimm an, es sei ein Dunstropfen.

Zum zweiten sei es, daß diese Dunstkügelchen sich gegenseitig in einer bestimmten Anordnung berühren. Nimm an, auf der Ebene in quadratischer und im Raum kubischer, wie oben beschrieben. So wird nämlich jedes Kügelchen von sechs anderen berührt, von denen nur vier hier auf der Ebene gezeichnet werden können, deren fünfte und sechste aber darüber- und daruntergelagert zu denken ist. Nachdem das so festgesetzt und angenommen ist, und wenn nun aber die Kälte durch die Zwischenräume eindringt, dann werden die Kügelchen von einer Berührungsstelle bis zur anderen vor der Kälte geschützt sein. So wird zwar zur Mitte der Kügelchen hin eine Kondensation eintreten, aber doch so, daß sie auch in Richtung auf die Diameter der Berührungspunkte wirkt, wo sie allerdings vor der Kälte geschützt sind.

Aber nicht zu Unrecht könnte einer, wie ich schon vorausgesagt habe, fragen, durch welche Macht die Kügelchen denn so im rechten Winkel aufgebaut würden?

Wenn es vom Material her nicht anders geschehen könnte, wäre die Aufgabe erledigt. Vom Standpunkt des Materials aus aber können sie noch auf zwei andere Arten geordnet werden, wie oben bemerkt. Und ferner können alle drei Ordnungen ordentlich miteinander vermischt werden, so daß eine verschiedenartige Anordnung herauskäme.

Oder sollen wir als Grund dieser Anordnung annehmen, daß allein in ihr eine Anordnung zustande kommt, die von allen Seiten gleich ist, und die Punkte der Berührungen gleichmäßig verteilt werden, in den anderen aber nicht? Denn wenn auch, wie oben gesagt, jede Kugel von zwölf anderen berührt wird, so sind die Zwischenräume zwischen den einzelnen Kugeln dreieckig und viereckig, hier sind sie jedoch von allen Seiten viereckig. Dort schneiden sich zwei Diameter der gegenüberliegenden Berührungspunkte unter rechten Winkeln, die übrigen vier aber nicht. Hier schneiden sich alle drei Achsen gleichartig und rechtwinklig. Dort entsteht aus der Verbindung der Endpunkte der Diameter ein Kubooktaeder, hier ein Oktaeder innerhalb jeder beliebigen Kugel.

Die Vorrangstellung der rechteckigen Anordnung vor der schrägen ist so zumindest erhellt, aber der Grund ist noch nicht hinreichend, der die Kugeln eher in dieser, als in jener Anordnung aufbaut. Macht das die Kälte? Aber wie?

Denn wenn sie überhaupt etwas tut, dann kondensiert sie. Oder sie durchdringt die Materie, wo sie offensteht oder zu wenig Widerstand leistet. Und um gründlich zu sein: es könnte schließlich zumindest die senkrechte Anordnung in dem geradlinigen Fall zur Erde gegründet sein, aber woher kommt dann diese entgegengesetzte Anordnung?

Es bleibt daher nur übrig, daß eine innere Wärme diese Anordnung der Tropfen bewirkt, falls sie überhaupt eine kubische Anordnung ist, das heißt, falls unser Nichts ein Etwas ist.

Nachdem die Sache soweit entwickelt ist, ist es schließlich schon so, daß die Wärme entweder von sich aus jeden beliebigen Tropfen zur Form des Oktaeders bringt oder die ganze Materie in eine geordnete Sternchenreihe verteilt und so die innere Ordnung der einzelnen Kugeln durch eine allgemeine äußere Anordnung unterstützt. In keinem Fall aber kann eine

Ordnung so fest bestehen, wo eine Unordnung, wie gerade hier, so leicht eintreten kann.

Es gibt aber auch Gründe, daß wir eher glauben sollten, daß die einzelnen Tropfen ohne Mithilfe einer äußeren Berührung sich selbst einordnen, wenn nämlich die Figur aus der Ordnung und gegenseitigen Berührung mehrerer einzelner Kugeln entsteht, dann muß es notwendig sein, daß hinwiederum alle Sternchen gleich sind. Aber man kann allein schon einen großen Unterschied der Größe unter ihnen feststellen. Ja selbst der Aufbau von vielen hat viel Ungewöhnliches.

Erinnere Dich an das vorher Gesagte, daß die Meinung von drei sich kreuzweise schneidenden Strahlen ein Nichts sei

Wir sind daher nicht weiter fortgeschritten, wenn nicht eine Art ersichtlich wird, auf die die innere Wärme den Dunstropfen auf drei Richtungen in oktaedrischer oder gar sechseckiger Form bestimmt, so daß an ihnen die Anhäufung der Materie durch Kondensation eintreten kann.

Es könnte jemand glauben, diese kleinen gefiederten Splitterchen flögen vereinzelt herum und vereinigten sich erst beim Auffall durch Zufall kreuzweise. Wahrhaftig, das ist falsch. Sie würden nämlich nicht immer dreifach, nicht in Mittelpunkten und nicht in einem Punkt zusammenfallen. Nun füge noch hinzu, daß alle Federn aus der Mitte des Sterns oder des doppelten Kreuzes nach außen in verschiedene Richtungen ragen, beinahe wie die Nadeln an einem Tannenzweig, was ein Beweis ist, daß in der nestförmigen Mitte eine formende Kraft ist, und sich von dort gleichmäßig in alle Richtungen verteilt.

Das Vorkommen von sechs Seiten bei den Lebewesen

Aber vielleicht ist das der Grund für die drei Richtungen, weil es in den Tieren genau die gleiche Anzahl von Richtungen gibt? Sie haben doch obere, untere, vordere, hintere, linke und rechte Seiten? Wenn einer das sagt, dann kommt er meiner Ansicht näher, er wird aber durch seine Zugeständnisse wider Erwarten in Widersprüche verstrickt werden. Zuerst nämlich muß er sich überlegen, was die Natur dieser Wärme sei, die die Ähnlichkeit mit den Tieren im Schneesternchen bewirkt. Darauf soll er sehen, wofür sie gut ist. Denn was hat das Tier mit dem Schnee gemeinsam? Der Schnee braucht diese Seiten nicht zum Leben, denn er lebt ja gar nicht. Zum dritten muß er abwägen, daß diese Teile den Tieren, nicht so sehr an geometrische Figuren und an den Würfel, die erste der räumlichen Figuren, wie an ihren Urtyp angeglichen sind, sondern aus einer gewissen Notwendigkeit, ein Ziel zu erreichen, geformt sind. Die erste Unterscheidung nämlich nach oben oder unten ist örtlich bedingt, bezogen auf die Oberfläche der Erde. Darum sind die Beine abwärts gerichtet, damit sie gegen das Körpergewicht stützen können, der Kopf ist nach oben, damit er die Nerven mit einem ihnen günstigen Saft ständig befeuchten kann, und damit die Augen und die Ohren weitest vom Boden entfernt den größten Umkreis in der Sicht haben, nachdem alle Hindernisse entfernt sind, und schließlich damit die Speise durch ihr Gewicht und der Trunk durch seinen flüssigen Zustand herunterfällt und an seinen Platz hinabgelangt, und nicht ein ständiges Ansaugen notwendig ist (wie bei den Pflanzen, die an einem Orte festgehalten sind). Eine andere Unterscheidung in vorn und hinten ist den Tieren gegeben, um die Bewegungen auszuüben, die in gerader Linie über die Erdoberfläche von einem Ort zum anderen führt. Daher schneiden sich diese zwei Durchmesser gegenseitig zwangsläufig unter einem rechten Winkel und machen die Fläche aus. Da die Tiere aber nicht eine Fläche sein können, sondern notwendigerweise Körper bekommen müssen, war es nötig, daß die dritte Richtung, die nach rechts und links, aus dem Zwang zur Körperlichkeit hinzukommt. Da-

durch werden die Tiere gewissermaßen doppelt, damit auch beim Einerschreiten eine Unterscheidung zwischen den Wechselwirkungen der Bewegungen und des Bewegten sei. Nicht also hat, was kubisch ist, Ähnlichkeit mit dem Menschen wegen irgendeiner Schönheit der Gestalt, sondern der Mensch hat die Ähnlichkeit mit dem Würfel erlangt, die gewissermaßen aus den verschiedenen Bedürfnissen mit den Elementen übereinstimmt.

Nachdem daher alles geprüft ist, was vor die Augen kam, so glaube ich, daß der Grund der sechseckigen Figur im Schnee kein anderer ist als der, der für die regelmäßigen Figuren der Pflanzen und der konstanten Zahlen gilt. Da aber in ihnen nichts ohne höchste Überlegung geschieht, zumindest nicht eine solche, die durch Ausschweifungen von Tüfteleien gefunden werden kann, sondern eine, die von vornherein im Entschluß des Schöpfers stand und welche von Anbeginn bis zum heutigen Tag durch die wunderbare Natur der Möglichkeiten der Tiere bewahrt bleibt. Ich glaube, daß zumindest im Schnee diese geordnete Form nicht so ohne weiteres besteht.

Es ist daher eine formbildende Kraft im Körper der Erde, deren Träger der Wasserdampf ist, wie es auch eine menschliche Seele, einen Geist gibt. Wie daher auch nirgendwo Dampf entsteht, ohne daß er durch eine bestimmte Wärme zu dem gemacht wurde, wie er heißt, nämlich Dampf, und durch dieselbe Wärme bewahrt wird, fortzufahren, das zu sein, so wird er auch durch eine formbildende Kraft, die andere die bildende Wärme nennen, zusammengehalten.

Aber erst nach der Zurückweisung zweier Einwände werde ich verkünden, was von meiner Meinung noch geblieben ist. Du könntest nämlich einwenden, bei den Pflanzen mache der unmittelbare Zweck, der der Aufbau eines bestimmten natürlichen Körpers ist, ersichtlich, daß in jeder Materie vorher eine formbildende Kraft gewirkt habe. Wo nämlich die Mittel zu einem bestimmten Zweck geordnet seien, dort sei Ordnung, dort sei kein Zufall, dort sei reine Vernunft, reine Ratio. Aus der Gestalt des Schnees aber könne kein Zweck ersehen werden, und es entstehe auch nicht durch die sechseckige Figur, daß der Schnee dauerhaft sei oder einen bestimmten natürlichen Körper einer gewissen haltbaren Form bewirke. Ich antworte, daß die formbildende Kraft nicht nur auf einen Zweck hin wirke, sondern auch auf Schmuck, sie strebe es nicht nur an, natürliche Körper zu formen, sondern pflege auch nur flüchtig zu spielen, was sich an vielen Beispielen von Fossilien erweist. Ich übertrage den Sinn alles dessen vom Spiel (solange wir annehmen wollen, die Natur spiele) auf dieses ernsthafte Vorhaben: weil ich glaube, daß die Wärme, die bisher die Materie bewacht hat, von der Kälte ringsherum besiegt wird, und daß sie, wie sie bislang in Ordnung gewirkt (freilich erfüllt von einer formgebenden Kraft) und wie sie in Ordnung gekämpft hat, so sich auch in ihrer gewissen Ordnung zur Flucht bereitet und den Rückweg antritt. Und daß sie sich in diesen zerstreuten, wie in Schlachtreihe ordentlich aufgestellten Verästelungen länger hält als in der ganzen übrigen Materie. Daß sie ferner so dafür sorgt, daß sie nicht (wie die Geschichte von Olympias berichtet) unehrenvoll und nicht aufrecht fällt.¹⁹⁾

Ein anderer könnte vielleicht einwenden, daß in den Pflanzen je eine seelische Kraft sei, da sie auch abgesondert als einzelne Pflanzenkörper bestünden. Deswegen sei es auch kein Wunder, daß für jede einzelne auch eigene Formen zurechtgemacht würden. In jedes Schneesternchen aber eine eigenständige Seele hineinzutüfteln, sei äußerst lächerlich, weswegen die

*Die
Prinzipien,
um die
Gründe der
Form des
Schnees zu
finden, stam-
men nicht
vom Nichts*

Formen des Schnees zumindest nicht in gleicher Weise aus dem Wirken einer Seele abzuleiten seien, wie bei den Pflanzen.

Ich antworte, daß die Sachlage auf beiden Seiten ähnlicher sei, als der, der dies einwirft, glauben könnte. Wir wollen ruhig zugeben, daß jeder Pflanze eigene Möglichkeiten innewohnen. Alle jedoch sind Abkömmlinge der einen und derselben universalen Macht, die in der Erde liegt, und die auf die Pflanzen wirkt wie die Kraft des Wassers auf die Fische, wie die des menschlichen Körpers auf die Läuse, die des Hundes auf die Flöhe und die des Schafes auf eine andere Art von Ungeziefer. Nicht alle Pflanzen sind nämlich aus dem Samen entstanden, die meisten sind zunächst aus der Urzeugung entstanden, obschon sie sich weiter aussamen. Die Kraft der Erde nämlich, die für sich selbst ein und dieselbe ist, teilt sich in die Körper auf und wächst mit den Körpern und in sie hinein, und schafft je nach der inneren Bedingung der jeweiligen Materie nach außen hin dieses oder jenes. So auch im Dunst, den die ganze Seele ganz und gar besessen hatte. Kein Wunder, wenn durch die Kälte, die die Teilung des ganzen Zusammenhängenden wegen der Zusammenziehung der Einzelteile in Bewegung setzt, sie sich um die Gestaltung in den Teilen selbst, wie im jeweiligen Ganzen bemüht.

O wie ist es wahr, daß das Leben tot ist, ohne Philosophie. Denn wenn jene Ehebrecherin der Fabel des AESOP die gestaltende Kraft im Schnee gekannt hätte, dann hätte sie ihren Gatten überzeugen können, daß sie aus dem Schnee empfangen habe, und sie wäre ihres unehelichen Kindes nicht so leicht durch die List des Gatten beraubt worden.²⁰⁾

Ich habe über den Urheber der Figur gesprochen: Es bleibt noch, daß wir die Figur selbst untersuchen, ob sie aus der gekreuzten Form der drei Diameter besteht, was bislang unterstellt war, oder ob sie von Anbeginn sechseckig sei, doch hierüber später. Jetzt wollen wir den begonnenen Weg weiterverfolgen. Der Grund also, warum diese Kraft eher die Winkelanzordnung des Oktaeders nachbildet, könnte folgender sein. Zunächst einmal ist das gesamte Geschlecht der Geister den geometrischen und regelmäßigen oder kosmopoetischen Figuren verwandt, was an vielen Beispielen bewiesen werden kann. Da die Geister nämlich Abbilder Gottes, des Schöpfers sind, so besteht auch sicherlich im Schöpfergeiste Gottes die mit Gott gleichewige Wahrheit dieser Figuren. Da es ferner nur allzu sicher ist, daß auch die Geister in ihrem innersten Wesen Größen annehmen, ob mit oder ohne physikalische Materie, darüber lasse ich mich nicht aus, so ist es verständlich, daß sie lieber geformte Größen annehmen als ungeformte. Und wenn sie geformt sind, dann sind sie aus diesem Grunde regelmäßige Figuren, und zwar Körper, weil die Geister nicht flächiger, sondern räumlich-körperhafter Natur sind. Unter den regelmäßigen Körpern ist aber der erste, der Kubus, der erstgeborene, der Vater aller übrigen. Seine Frau aber ist gewissermaßen das Oktaeder, das so viele Ecken hat, wie der Würfel Flächen; und deren Mittelpunkten entsprechen jeweils die einzelnen Ecken des Oktaeders.

Ein kleines Teilchen der Materie des Dampfes, das sich absplattet, nimmt daher, wenn es überhaupt Gestalt annimmt, worüber wir schon Übereinstimmung erzielt haben, die Form des Würfels, und dessen Begleiters, des Oktaeders an. Das hat oben auch die materielle Notwendigkeit der gleichgroßen Kugeln, die auf einen Haufen geschüttet wurden, nahegebracht. Sie wurden nämlich als Bruchstücke des Würfels und Oktaeders in ihren Berührungspunkten ausgeschüttet und hingeworfen. Doch warum eher zur

*Der Geist ist
das Ebenbild
des Schöpfers*

*Man sollte
zur Ansicht
vom Nichts
zurückkehren*

Form des Oktaeders als des Würfels? Vielleicht weil die Figur des Würfels die der Entfernung ist, die des Oktaeders, die der Nähe? Und in der Tat, die Materie und die wärmende Kraft ziehen sich zusammen unter der feindlich andringenden Kälte. Woher aber ist es sicher, daß dies die Figur der Ausdehnung, jene die der Sammlung ist? Doch wohl, weil die acht Ecken, mit denen diese außen bedacht ist, in jener in derselben Zahl um den Mittelpunkt gelagert sind. Denn wenn du dem Würfel seine acht in gleichen Ebenen abgeschnittenen Ecken nimmst, und diese nach innen gekehrt aneinanderbaust, dann stellst du genau ein Oktaeder her. Und der Würfel wird in mehr, will heißen acht Ecken, aufgeteilt, das Oktaeder in weniger, nämlich sechs.

Die Edelsteinschleifer sagen, daß man in den Diamanten natürliche Oktaeder finde, von der vollendetsten und genauest begrenzten Form. Wenn das so ist, dann bestärkt uns das sehr. Denn die geistige Kraft, die in der Erde dem Diamanten die Form des Oktaeders eingegeben hat, die aus dem tiefsten Gewölbe ihrer Natur entnommen ist, und die zugleich mit dem Dampf aus der Erde hervorkommt, gab auch dem Schnee, der sich aus diesem Dampf zusammensetzt, diese Form.

Trotzdem: Was die überkreuzte Form der drei Diameter angeht, so ist in ihr nicht mehr die Form des Oktaeders als des Würfels. In jenem werden die Ecken, in diesem die Flächenmittelpunkte durch drei Diameter dieser Art verbunden. In jenem sind die Winkel der Diameter in der Mitte, hier drückt es die Ecke, die den Körper vollständig macht, aus. Wir haben also vergeblich um die Auswahl der ganzen Figur so viel Arbeit, wo von beiden nur ein Bruckstück da ist.

Aber wohin werde ich dummer Mensch fortgerissen, der ich in der Absicht fast nichts zu geben, selbst fast nichts tue, weil ich aus diesem fast nichts fast die Welt selbst, in der alles enthalten ist, gebildet habe: und da ich vor der kleinen Seele des allerkleinsten Tieres oben geflüchtet bin, führe ich schon dreimal die Seele des höchsten Wesens, des Erdballes, im Schneeatom vor?

Daher will ich den Rückweg antreten, und ich werde mir fleißig Mühe geben zu zeigen, daß, was ich gegeben und gesagt habe, ein Nichts ist. Das aber kann geschehen, wenn ich so schnell, wie sich mein Schneeflöckchen verflüssigt, jene Tüfteleien durch entgegengesetzte umstoße und aufhebe.

Denn während ich dies schreibe, hat es schon wieder geschneit, und zwar dichter als neulich. Fleißig habe ich mir die Schneeteilchen angesehen: alle fielen sie strahlenförmig, aber in zwei Arten: einige waren sehr klein, mit rundherum ansetzenden Strahlen von unbestimmter Zahl, die waren einfach, ohne Federn und Streifen, und sie waren sehr fein. In der Mitte aber waren sie zusammengefaßt zu einem größeren Kügelchen. Und ihrer war der größere Teil. Darunter aber waren kleinere sechseckige Sternchen gestreut, von ihnen aber war keines, das anders als flächig war, weder als es flog, noch als es auffiel. Auch mit Federchen, die in derselben Ebene mit ihrem Stil angeordnet waren. Es war aber ein unterer siebenter kleiner Strahl nach unten gerichtet, wie eine Wurzel, auf den die Fallenden niederfallen konnten, und auf dem sie eine zeitlang hoch aufgestützt wurden. Das ist mir vorher auch nicht entgangen, aber es ist falsch aufgefaßt worden, wie wenn die drei Diameter nicht auf derselben Ebene lägen. Also ist nicht weniger das, was ich bislang gesagt habe, als das, worüber ich gesprochen habe, vom Nichts so wenig wie möglich entfernt.

*Endlich
ernsthaft
über die
sternförmige
Figur des
Schnees*

Von der ersten graupeligen Art glaube ich, daß sie aus dem Dampfe entsteht, der schon fast von der Wärme verlassen ist, und der schon dabei war, sich zu Wassertröpfchen zu kondensieren. Daher sind sie auch rund und erhalten keine schöne Form, von der formbildenden Kraft schon verlassen, sind sie auch von allen Seiten mit Strahlen versehen, nach den Prinzipien, die oben bei der Betrachtung des an den Fenstern entstehenden Reifs angewendet worden sind.

Bei der zweiten Art, die die der Sternchen ist, hat die Betrachtung des Würfels oder Oktaeders keinen Sinn, auch nicht jegliche Berührung der Tropfen, da sie als Flächen fallen, nicht, wie ich oben geglaubt habe, überkreuzt in drei Diametern. Wenn daher auch hier die formgebende Kraft ihren Platz bewahrt und in der Ursache bleibt, so ist doch die Frage nach der Wahl der Form wieder aufzunehmen. Zunächst, warum sind sie eben? Vielleicht, weil ich oben unrichtigerweise die Flächen der formbildenden Kräfte entzogen habe? Denn in allen Blüten ist die fünfeckige Fläche enthalten, nicht das räumliche Dodekaeder. Dann wäre der Grund der ebenen Figur freilich der, daß die Kälte den warmen Wasserdampf in einer Ebene berührt, und so nicht in gleicher Weise den ganzen Dampf umlagert; dann entstehen Sternchen, sonst fallen Graupeln.

Warum am ehesten eine sechseckige Figur?

Warum aber Sechseck? Etwa weil unter den regelmäßigen Figuren dies die erste tatsächliche Fläche ist, die zu keinem Körper zusammengesetzt werden kann? Denn das Dreieck, Viereck und Fünfeck bilden Körper. Oder weil sich das Sechseck über die Ebene erstreckt, ohne eine Lücke zu lassen? Dasselbe tut aber auch das Dreieck und Viereck. Oder weil dies dem Kreis am nächsten kommt unter allen, die die Fläche bedecken, ohne eine Lücke zu lassen? Oder ist folgender Unterschied zwischen der formbildenden Kraft, daß es sowohl eine gibt, die Unfruchtbares schafft, wie auch jene andere, die Fruchtbares schafft, so daß jene das Dreieck oder das Sechseck entstehen läßt, diese aber das Fünfeck? Oder ist schließlich die Natur selbst dieser formbildenden Macht im innersten Gewölbe ihres Wesens Teilhaberin des Sechsecks?

Von den fünf angeführten Gründen maßen der erste, zweite und dritte für sich an, daß die formbildende Kraft sich aus der Sache selbst Rat hole und je nach der Gegebenheit des Feldes die Schlachtreihe aufstelle; weil sich der Kampf des warmen Dampfes und der kalten Luft auf einer Ebene vollzieht, nicht in einer Körperlichkeit, wählt sie auch eine Form, die eher flächig als körperhaft ist. Somit hätte sie auch im zweiten und dritten Grund einen Vorbedacht materieller Art. Denn nur der erste Grund pocht auf eine Eigenart des Sechsecks, indem er eine passende Eigenart dieser Figur für den Kampf berücksichtigt. Bei einem Kampf auf der Ebene ist daher eine ebene Figur von Nöten, nicht aber ist es nötig, daß es eine solche Figur ist, die sich zu keinem Körper zusammensetzen läßt, es ist aber deswegen nur eine solche, weil, wie sich die Formen bei den physikalischen Körpern, die den festen Raum umgeben, entsprechen, so die Formen, die keinen festen Raum umgeben, auf den Ebenen sind: hier wird eine formale Eigenheit betrachtet, nicht eine Notwendigkeit, die vom Material bedingt ist.

Zum zweiten und dritten Grund wäre folgendes zu sagen, daß das Sechseck auch durch eine materielle Notwendigkeit von der formgebenden Kraft ausgesucht würde, damit natürlich keine Lücke bleibt, und damit die Balgung des Dunstes zur Gestalt des Schnees umso leichter vollzogen werden könne.

Am bequemsten könnte sie nämlich im Kreise vor sich gehen, aber da die kleinen Kreise Lücken lassen, so wird deswegen eine Figur gewählt, die dem Kreise ähnlicher ist. Wahrlich, diesem Grunde wurde schon oben die Ungleichheit der Sternchen entgegengehalten, von denen einige sehr klein sind, mit winzigsten und einfachsten Strahlen ohne Federn. Das ist zum Beweis, daß nicht jeweils eine große Fläche des Dampfes zu Schnee übergeht, sondern einzeln kleinste Flächen, die eine nach der anderen, und diese alle sind ungleich. Die Betrachtung, daß Zwischenräume ausgeschlossen seien, hat daher keinen Platz, die doch nur bei der Aufteilung der ganzen Oberfläche in gleiche Sechsecke vorherrscht. So kommt es, daß der zweite und der dritte Grund aus der Zahl verwiesen werden, wenn sie nicht so weit auf den ersten zurückgeführt werden können, daß die formgebende Kraft das Sechseck wählt, ohne durch eine Notwendigkeit der Materie und der Lücken gezwungen zu sein, sondern nur nach der hier traktierten Eigenschaft, daß das Sechseck sonst ohne eine Lücke zu lassen eine Ebene bildet, und daß es (von den Figuren, die dasselbe können) die dem Kreise ähnlichste ist.

Der vierte Grund zumindest kann so unverhüllt nicht bestehen. Denn die weißen Lilien werden mit drei und mit sechs Blütenblättern ausgebildet, und sie sind nicht unfruchtbar. Nach derselben Art sind viele Kelche fast aller Waldblumen gebaut. Falls nicht vielleicht das zur Unterscheidung dient, daß unter einer fünfeckigen Blüte eine fleischige Frucht erwächst, wie bei den Äpfeln und Birnen, oder eine mürbe, eßbare, wie bei den Rosen oder den Gurken, bei denen der Samen zwischen Fleisch und dem mürben Gewebe abgelagert ist. Unter der sechseckigen Blüte aber erwächst nichts, außer Samen an einer trockenen kleinen Stelle, und die Frucht liegt etwa in der Blüte. Oder ist das zufällig der Unterschied, daß keine sechseckige Blüte an Bäumen und Fruchtpflanzen ist, sondern nur an Kräutern und besonders Zwiebelgewächsen? Es könnte wohl ein anderer über die Säfte selbst beratschlagen, ob etwas in ihnen dem Unterschied zwischen den Blütenformen entspricht.

Das Ding ist mir noch nicht bekannt, und so soll es genug sein, andere leicht an diesen vierten Grund erinnert zu haben.

Für den fünften Grund sprechen andere Werke dieser formgebenden Kraft, nämlich die Bergkristalle, alle sechseckig, während oktaedrische Diamanten sehr sehr selten sind. Aber die gestaltende Kraft der Erde umfaßt nicht nur eine Form, sie kennt die ganze Geometrie, und ist in ihr geübt. Ich habe nämlich in Dresden am Königspalast, im Marstallgebäude, eine Verzierung aus Silbererz gesehen, aus dem ein Dodekaeder von der Größe einer kleinen Haselnuß gewissermaßen herausleuchtete, indem es zur Hälfte herausragte.²¹⁾ Nach einer Beschreibung der Quellen von Bad Boll ragt der vordere Teil eines Ikosaeders unter den Mineralien hervor.²²⁾ Daher ist es wahrscheinlich, daß diese formgebende Kraft für die verschiedene Flüssigkeit zu einer anderen wird. Im Vitriol ist die kubische rhombische Figur häufig, im Salpeter ist es dieselbe Figur.

Daher sollen die Chemiker sagen²³⁾, ob im Schnee ein Salz ist, welcher Art dieses Salz ist und wie es die Figur hervorbringen könnte. Denn ich, nachdem ich an die Tore der Chemie geklopft habe und sehe, wie viel noch zu sagen übrig bleibt, damit das Ding eine Ursache habe, will lieber von Dir, Du fähigster Mann, hören, was Du denkst, als Dich durch weitere gründliche Erörterungen zu ermüden.

Nichts folgt.

*Welche
Blumen
haben die
Sechs- und
die Dreizahl?*

*Was
Botaniker
beachten
sollten*

*Mineralien
mit
sechseckiger
Kristallform*

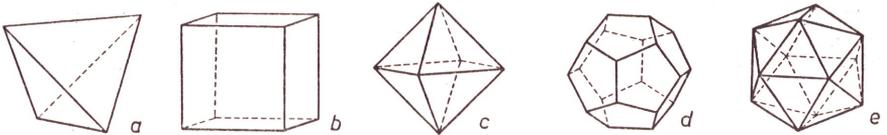
*Was Metall-
kennner und
Chemiker
beachten
sollten*

Anmerkungen

(Nummerierung entsprechend den im Text eingefügten Hinweisen.)

Unter Verwendung der beiden folgenden Übersetzungen und Bearbeitungen von Keplers Neujahrsgebe über den hexagonalen Schnee: R. Klug im 56. Jahresbericht des K. K. Staatsgymnasiums zu Linz, 1907. F. Roßmann unter Mitwirkung von M. Caspar und F. Neuhart in „Dokumente zur Morphologie, Symbolik und Geschichte“ W. Keiper, Berlin 1943 und der Bemerkungen von H. Steinmetz zu der genannten Schrift in den Berichten des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Regensburg (Kepler-Festschrift, herausgegeben von K. Stöckl), 19. 1928/30. 257.

1. Nach Demokrit (460—370 v. Chr.) bzw. Epikur (341—270 v. Chr.) sind alle Körper nicht beliebig weit, sondern nur bis zu einer Grenze teilbar, mit der eine letzte unteilbare Größe erreicht wird: das Atom. Diese Atome sind so klein, daß sie einzeln nicht mehr wahrgenommen werden können.
2. Nach der Myriadenberechnung des Archimedes (287—212 v. Chr.) ist die Zahl der Sandkörnchen, die einen Raum von der Größe der Fixsternsphäre erfüllen, nicht unendlich groß, sondern berechenbar. Wird der Durchmesser der Fixsternsphäre auf höchstens 100 000 000 Millionen Stadien, d. h. nach heutigem Maß auf annähernd 2 Lichtjahre geschätzt, der Durchmesser der Sandkörnchen jedoch so klein, daß 10 000 (1 Myriade) auf ein Mohnkörnchen gehen, so gibt das eine „Sandeszahl“ von höchstens 1000 Myriaden der 8. Ordnung, das ist 10^{63} .
3. Plato (427—347 v. Chr.) hat den 4 Elementen Erde, Feuer, Luft und Wasser je einen regelmäßigen geometrischen Körper zugeordnet: der Erde den Würfel, dem Feuer das Tetraeder, der Luft das Oktaeder, dem Wasser das Ikosaeder.
Der 5. der sog. Plato'schen Körper ist das Dodekaeder (Pentagondodekaeder).



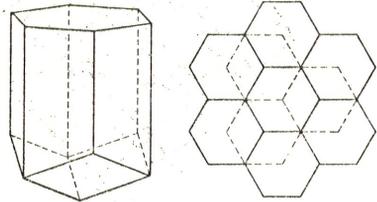
Die 5 Plato'schen Körper: a) Tetraeder, b) Würfel, c) Oktaeder, d) Dodekaeder, e) Ikosaeder.

4. Über die isländischen Schläuche steht in Keplers „Traum vom Monde“ (1634 von seinem Sohn Ludwig aus dem Nachlaß herausgegeben): Allenthalben findet man in Schifferbüchern die Ansicht, mag sie nun wahr oder falsch sein, daß die Steuerleute, die ihren Kurs von Island nehmen, einen Windsack öffnen, um den gewünschten Wind zustande zu bringen... „Wind und Rauch in Wort und Schrift“ sind offenbar Anspielungen auf die leeren Versprechungen bezüglich der Gehaltsansprüche Keplers an die kaiserliche Kasse.
5. Herodot, Historien, Buch 1. 188: „Zieht ins Feld der Großkönig (der Perser), so ist er wohl ausgerüstet mit Kornvorräten der Heimat und Viehherden; sogar Wasser wird mitgeführt aus dem Choaspes, einem Flusse, der an Susa vorbeifließt (linker Nebenfluß von Euphrat und Tigris, heute Karun); von diesem allein trinkt der König und von keinem anderen Flußwasser. Wohin er auch ziehen mag, überall folgt ihm dann allerdings eine Menge vier-rädriger Maultierwagen, die das Choaspeswasser, und zwar unabgekocht, in silbernen Gefäßen nachbringen“.
6. Parmenides (540—480 v. Chr.) leugnete alles Werden und sah im Gegensatz zu Heraklit das Seiende (Bleibende) als Weltprinzip an.
- 7a. Julius Scaliger in seinem Werk „Exotericarum exercitationum. De Subtilitate ad Hieronymum Cardanum“: Die Acarus-Milbe „hat Kugelform und kann kaum mit dem Auge gesehen werden. Sie ist so klein, daß sie nicht aus Atomen zu bestehen, sondern selbst eines der Atome des Epikur zu sein scheint. Sie lebt unter der Haut und verursacht ein Brennen durch ihre Miniergänge (cuniculi).“
- 7b. Hieronymus Cardanus (1501—1576), Mathematiker, Arzt und Philosoph, hat auf dem Gebiet der Gleichungslehre Beachtliches geleistet („Cardanische Formeln“); von ihm stammt die Beschreibung der „Cardanischen Aufhängung“ eines Gegenstandes, der an den Bewegungen seines Trägers nicht teilnehmen soll; Cardan-Gelenk.

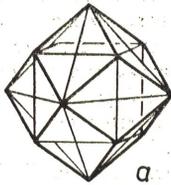
8. D. Johannes Jessenius a Jessen (1566—1621), Anatom an der Universität Prag.
9. Erste Beobachtung der hexagonalen Symmetrie des Schnees.
10. Dieses Wortspiel mit „Nix“ (= Schnee) und „Nihil“ (= nichts) verliert in der Übersetzung viel von seiner Wirkung und ist daher in der ursprünglichen Form gebracht.
11. Aristophanes (445—386 v. Chr.) in seiner Komödie „Die Wolken“:

Den Chairephon fragt Sokrates soeben:
Wieviel Flohfüße weit ein Floh wohl hüpf?

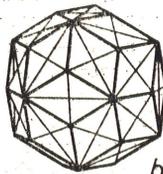
.....
Er fängt den Floh, läßt Wachs zergehen und taucht
Ihn mit den Füßen drein, das Ding erkalte,
Pantoffeln trägt der Floh, ganz angegossen,
Die nimmt er ab und mißt damit die Weite.



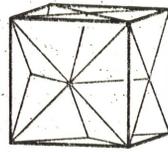
12. Psalm 147, Vers 16: Er gibt Schnee wie Wolle . . .
- 13a. Eine Bienenwabe, entwickelt aus dem Rhombendodekaeder. Zu 13a und b.
- 13b. Die Umgebung einer Bienenwabe durch neun Nachbarwaben.
14. Die beiden „rhombischen Körper“, die nur aus rhombenförmigen Flächen bestehen (das Rhombendodekaeder = 12-Flächner und das Rhombentriakontaeder = 30-Flächner), sind eine Entdeckung Keplers, die er jedoch bereits in einem Brief von 1599 erwähnt hat.



a



b



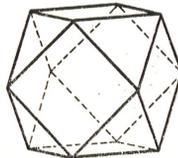
c

- a Das Rhombendodekaeder und seine Beziehung zum Würfel und Oktaeder,
- b Das Rhombentriakontaeder und seine Beziehung zum Pentagondodekaeder und Ikosaeder,
- c Der Würfel und seine Beziehung zu zwei entgegengesetzt liegenden Tetraedern.

Für die bereits in Anmerkung 3. genannten regelmäßigen Vielfache oder Plato'schen Körper gilt die Bedingung, daß sie von kongruenten regelmäßigen Vielecken gebildet werden und kongruente regelmäßige Ecken besitzen; d. h. sie sind gleichedrig und gleichflächig. Für die Verminderung dieser Regelmäßigkeit gibt es 2 Möglichkeiten:

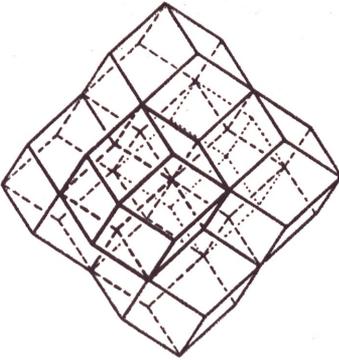
1. sie sind gleichedrig, aber nicht gleichflächig,
2. sie sind gleichflächig, aber nicht gleichedrig.

Aus der ersten Forderung ergeben sich die Archimedischen Körper (Kepler hat sie zuerst wieder systematisch abgeleitet und abgebildet in seiner „Weltharmonik“, II. Buch). Ein solcher Archimedischer Körper ist z. B. das Kubooktaeder.

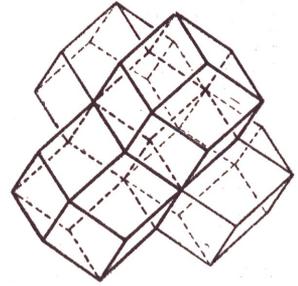


Der zweiten Forderung entsprechen die beiden Keplerschen Körper, so besteht z. B. das Rhombendodekaeder zwar aus 12 gleichen Flächen, weist aber 3-zählige und 4-zählige Ecken auf.

Von diesen regelmäßigen bzw. halbrechmäßigen geometrischen Körpern sind jedoch nur solche als Kristallform realisierbar, die dem Rationalitätsgesetz genügen. Von den Platoschen Körpern sind dies nur das Tetraeder, Oktaeder und der Würfel; das kristallographische Pentagondodekaeder wird von ungleichseitigen Fünfecken begrenzt. Näheres über die Kristallformen und ihre Einteilung in 32 Symmetrieklassen in den Lehrbüchern der Mineralogie bzw. Kristallographie.



15. 6 Rhombendodekaeder stoßen mit ihren 4-kantigen Ecken in einem Punkt zusammen.

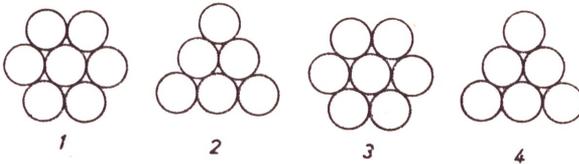


- 4 Rhombendodekaeder stoßen mit ihren 3-kantigen Ecken in einem Punkt zusammen.

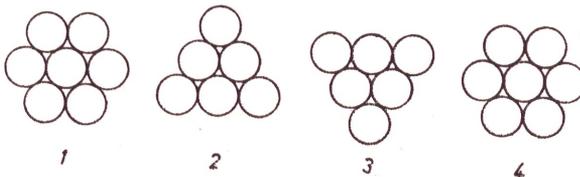
16. Kepler beschreibt als dichteste Kugelpackung in beiden Arten seiner Ableitung nur eine der beiden möglichen Packungen, nämlich die „kubisch dichteste Kugelpackung“. Daß er die Identität der beschriebenen Anordnungen — mit dreizähliger und vierzähliger Symmetrie — kennt, geht aus seinem Satz hervor: „Und wieder wird genau wie früher eine Kugel von zwölf anderen berührt werden, nämlich von sechs darumliegenden auf derselben Ebene und dreien darüber und dreien darunter; so kann in der festest gefügten Zusammenballung keine dreieckige ohne viereckige sein und umgekehrt.“

Tatsächlich gibt es jedoch noch eine zweite Möglichkeit der dichtesten Packung, die hexagonal dichteste Kugelpackung. Daß eine dichteste Packung nur entsteht, wenn nicht Kugel über Kugel liegt, sondern die Kugeln der 2. Kugelebene in die Lücken der 1. Kugelebene einrasten, hat Kepler klar ausgesprochen. Nun liegen um eine Kugel in derselben Ebene stets sechs Kugeln, folglich auch sechs Lücken. Die zweite Kugelebene kann jedoch mit drei unmittelbar benachbarten Kugeln nur drei von diesen sechs Lücken besetzen. Daraus ergeben sich nun die zwei Möglichkeiten:

1. Die dritte Kugelebene ist identisch mit der ersten, die vierte mit der zweiten und so fort, es bleibt also immer die gleiche Tripelschar von Lücken unbesetzt. Die Gesamtsymmetrie einer solchen Anordnung ist hexagonal (ohne Vierzähligkeit).
2. Die Kugeln der zweiten Lage liegen über dem ersten Lückentripel, die der dritten Lage jedoch über dem zweiten Lückentripel und erst die vierte Lage ist wieder identisch mit der Ausgangslage. Das ist die von Kepler beschriebene und gezeichnete Anordnung; ihre Gesamtsymmetrie ist kubisch (4-zählige und 3-zählige Symmetrie).



Hexagonal
dichteste Kugelpackung.



Kubisch
dichteste Kugelpackung.

Das Prinzip der dichtesten Kugelpackung ist nach heutiger Kenntnis in vielen Kristallstrukturen verwirklicht. So kristallisieren z. B. in der kubisch-dichtesten Kugelpackung Kupfer, Silber, Gold und über 20 weitere Elemente, in der hexagonal-dichtesten Kugelpackung Zink und fast 30 weitere Elemente. Außerdem sind in vielen Oxyden (z. B. Spinell, Korund) und komplexen Sauerstoffverbindungen die Sauerstoffionen, z. T. geringfügig deformiert, in dichtester Kugelpackung angeordnet (z. B. Olivin).

17. Die Gedanken über die göttliche Proportion, den goldenen Schnitt, hat Kepler niedergelegt in einem Brief an Tanckius in Leipzig vom 12. Mai 1608, später außerdem im III. Buch der Weltharmonik (M. Caspar, München, 1939).

Eine ausführliche Anmerkung hierzu in Caspar und Neuhart.

18. Diese vermeintlich beobachtete Anordnung der sechs Strahlen eines Schneekristalls stellt Kepler selbst (S. 22) auf Grund späterer Beobachtungen an frisch gefallenem Schnee als Irrtum hin.

19. Vergl. „Olympias, die Mutter Alexanders des Großen“, von Walther Tritsch, Frankfurt/Main, 1936.

Bei Kepler steht hier die Einschaltung:

„Bei Euripides steht folgender Vers, über Polyxena, als sie am Grabe des Achilles geopfert werden sollte, ‚war einzig sie bedacht, daß sie mit Anstand fiel‘. (Denselben Vers teilt Plinius der Jüngere in den Briefen an eine vestalische Jungfrau mit, die Domitian lebendig begraben hat.)“

Es handelt sich um den Opfertod Polyxenas, der jüngsten Tochter des Priamos und seiner Gemahlin Hekabe:

„Achaier, die ihr meine Stadt zerstört, ich sterbe willig.
Keiner lege Hand an meinen Leib, denn herzlich biete ich
die Kehle dar. Ungefesselt laßt mich und tötet mich!
Bei den Göttern! Laßt mich als Freie sterben! Als Königstochter
schäme ich mich, bei den Toten Sklavin zu heißen!“ —
Die Mannen waren tief bewegt. Der Herrscher Agamemnon
befahl den Jünglingen, das Mädchen loszulassen. Als sie
dies Herrscherwort hörte, faßte sie oben an der Schulter ihr
Gewand und riß es zur Leibesmitte hin, zum Nabel auf.
Den Busen zeigte sie, die Brust, die herrlich schöne wie ein
Götterbild, und ließ aufs Knie sich nieder auf die Erde
und sprach vor allen das standhaft kühne Wort:
„Sieh hier, o Jüngling, wenn du meine Brust durchstoßen willst, stoß zu!
Verlangst du meinen Nacken: meine Kehle ist dazu bereit.“
Ihn jammerte des Mädchens — soll er oder soll er nicht? —
Durchschneidet ihr die Luftröhre mit dem Eisen, Blutbäche stürzen
draus hervor. Dessen ungeachtet, noch im Sterben
war einzig sie bedacht, daß sie mit Anstand fiel,
verbergend, was man Männerblicken bergen muß.
Nachdem sie ihren Geist unterm Todesstreich ausgehaucht,
war keiner der Achaier, der sich nicht mühte:
Die einen streuten Blumen auf die Tote mit vollen Händen,
die anderen trugen Fichtenscheiter herbei und bauten draus den Scheiterhaufen.

20. Es handelt sich nicht tatsächlich um eine Fabel des Aesop, sondern um die Fabelsammlung „Esopus“ von Burcard Waldis.

Von einem Kauffman vnd seinem Weibe

Ein Kauffman seinen gwerben nach
weit hin in frembde Lande zoch;
war wol zwey Jar von seinem Weib,
das er jr nie kein Brieflein schreib.

Darnach er wider heim hin kumpt,
ein kleines Kindlin da vernimpt.
Er sprach: „woher kompt dir das Kindt?
in meiner rechenschafft nit fint,

Das du hetst Kinder one Mann:
es muß ein seltzam deutung han;
denn wie mich dunckt, ist kaum halb jerig.“
Sie sprach: „ich war ewr sehr begerig,

das ich mich selb nit massen kundt,
vnd het kein Artzt zu solcher Wundt;
vnd war gleich in der Mitternacht.
Ich lieff in Hof, daselben macht

ein kleines Kind von frischem Schnee.
Das aß ich auff; da ward mir wehe
im Leib vnd kriegt dis Kindt davon:
drumb habt der halben kein argwon.

So hat mirs vnser Herrgott bschert,
vnd hab kein andern Mann begert.“
Der Mann ließ solchs also geschehen,
thet mit jr durch die Finger sehen,

vnd wolt sie öffentlich nit schelten,
oder solchs vor jrn Freunden melden.
Schwieg also still, gedacht seins fugs,
biß das das Kindt zum theil erwuchß,

vnd war hin vmb die sieben Jar.
Er sprach zum Weib: „ich muß hinfahrn
meins handels halb hinab zun Schiffen,
die ligen dniden in der tieffen,

mit grossem gut her kommen weit.“
Nun wars im mitten Sommer zeit.
Er nam mit jm denselben Knaben,
sprach: „das ich mög Gesellschaft haben.“

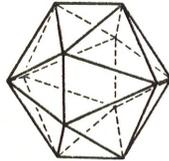
Wie er nauß kam, verkaufft zuhandt
den Knaben weit in frembde Landt
eim Kauffman, das ern mit sich nem,
auff das er nimmer wider kem.

Wie er heim kam in selben tagen,
die Fraw thet jn gantz fleissig fragen,
wo er den Knaben het gelossen?
Er sprach: „er ist mir gar zerflossen.“

Wie er denn war von Schnee gemacht,
 baldt ich in die Sonne bracht,
 vor grosser hitz er gar verschmaltz,
 gleich wie im Wasser thut das Saltz.⁶

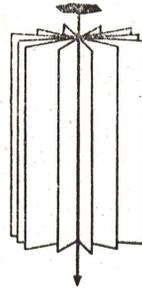
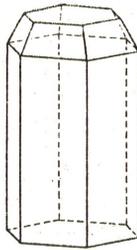
Mancher dem andern oft vorleugt,
 vnd doch sich selb damit betreugt.
 Es lert erfahrung vnd die Schrifft:
 Vntrew jrn eigen Herren trifft.

21. Wohl sicherlich Silberglanz, Ag_2S , der ehemals im Revier um Freiberg/Sachsen in reicher Menge und in schönen Kristallen, z. T. in modellartigen Rhombendodekaedern, gefunden wurde.
22. Da das regelmäßige Ikosaeder als Kristallform nicht möglich ist (vergl. Anmerkung 14), handelt es sich hier wohl um die Kombination von Pentagondekaeder + Oktaeder, die dem Ikosaeder sehr ähnlich ist und beim Pyrit nicht selten auftritt.



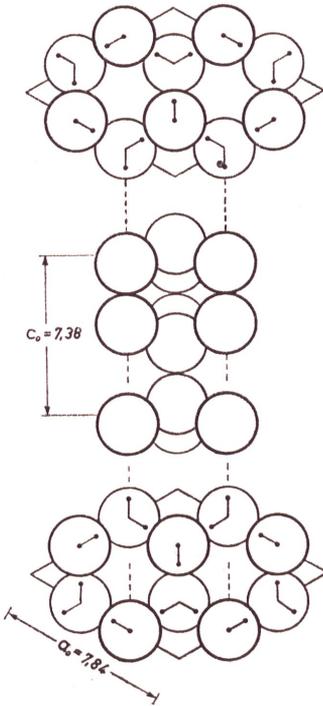
23. Kepler spricht die Chemiker an, daß nur sie in der Lage seien, die Antwort auf das von ihm aufgeworfene Problem zu finden. Diese Antwort, wie der Schnee „die Figur hervorbringen könnte“ wird durch die Ergebnisse der modernen Kristallographie und Kristallchemie gegeben. Schnee (Eis) kristallisiert hexagonal, wohl in der dihexagonal-pyramidalen Klasse, C_{6v} – 6 mm mit einer polaren hexagonalen Hauptachse und 6 vertikalen Spiegelebenen (keine horizontale Spiegelebene!).

Morphologie und
 Symmetrieelemente
 eines Eiskristalles

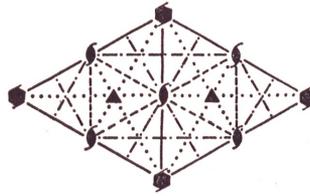


Die Struktur ist aufgebaut aus H_2O -Molekülen, die — wie auf Grund des geringen spezifischen Gewichtes anzunehmen war und durch die röntgenographische Strukturbestimmung bestätigt wurde — nicht eine dichteste Kugelpackung bilden, sondern relativ locker in gegenseitiger tetraedrischer Umgebung angeordnet sind (vergleichbar der Lage der Si im Tridymitgitter oder den Zn und S im Wurtzit). Die Symmetrie des Sauerstoffgerüsts (W. H. Bragg 1922, Barnes 1929) wird durch die Anordnung der Wasserstoffprotonen verringert, deren Lage Fowler und Bernal (1936) nach eingehender Diskussion der Konstitution des Wassermoleküles abgeleitet haben.

Die Symmetrie der Elementarzelle entspricht der Raumgruppe $C_{6v}^3 - P 6_3 cm$; die Größe ist $a_0 = 7,84 \text{ \AA}$, $c_0 = 7,38 \text{ \AA}$; Inhalt der Elementarzelle = $12 \text{ H}_2\text{O}$.

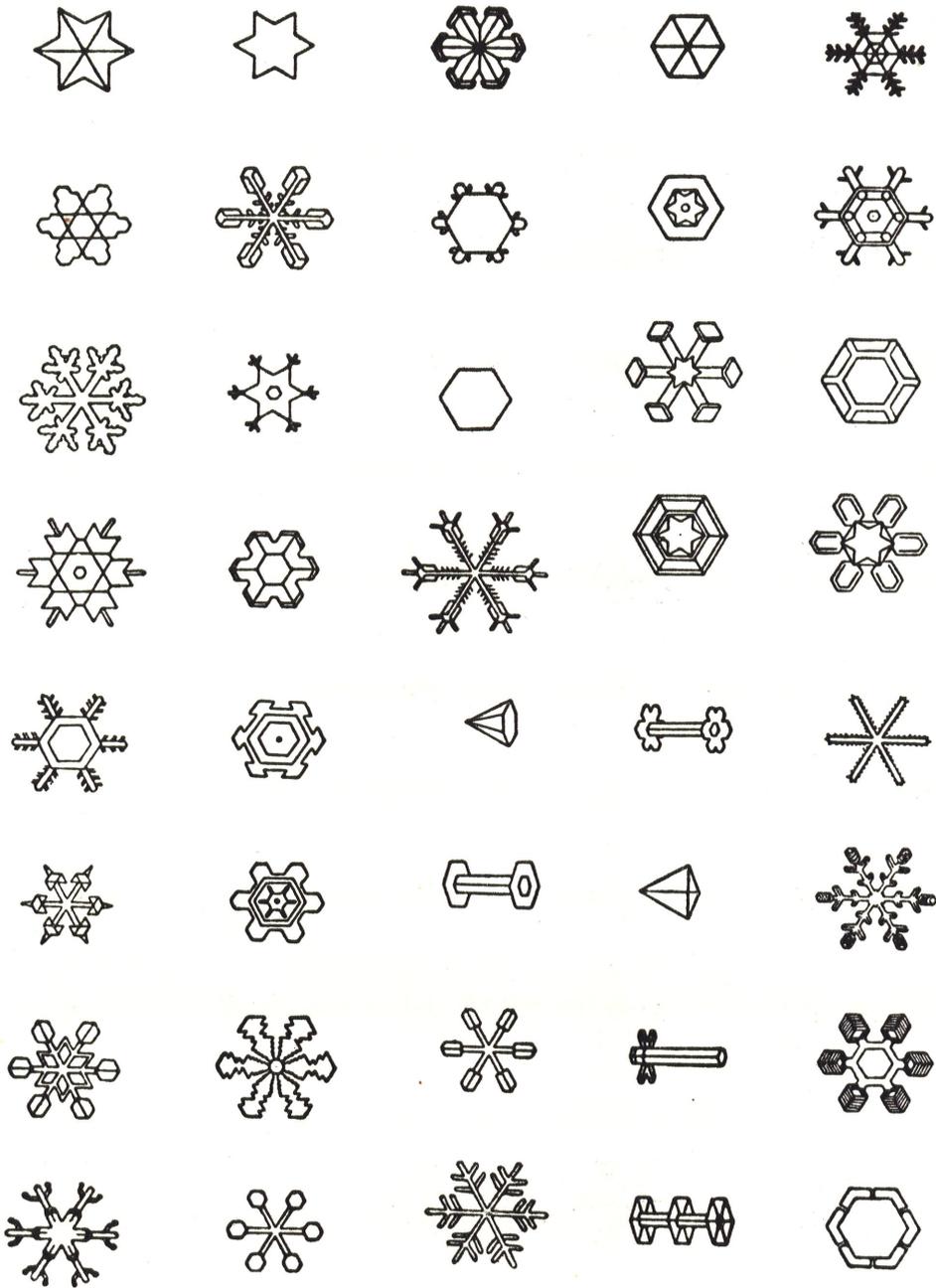


Struktur und Struktursymmetrie von Eis.
Jede Kugel entspricht einem H_2O -Molekül,
bestehend aus einem relativ großen Sauerstoff-Atom (O)
und zwei sehr kleinen Wasserstoff-Atomen (H).
(vergleiche auch die nächste Abbildung)

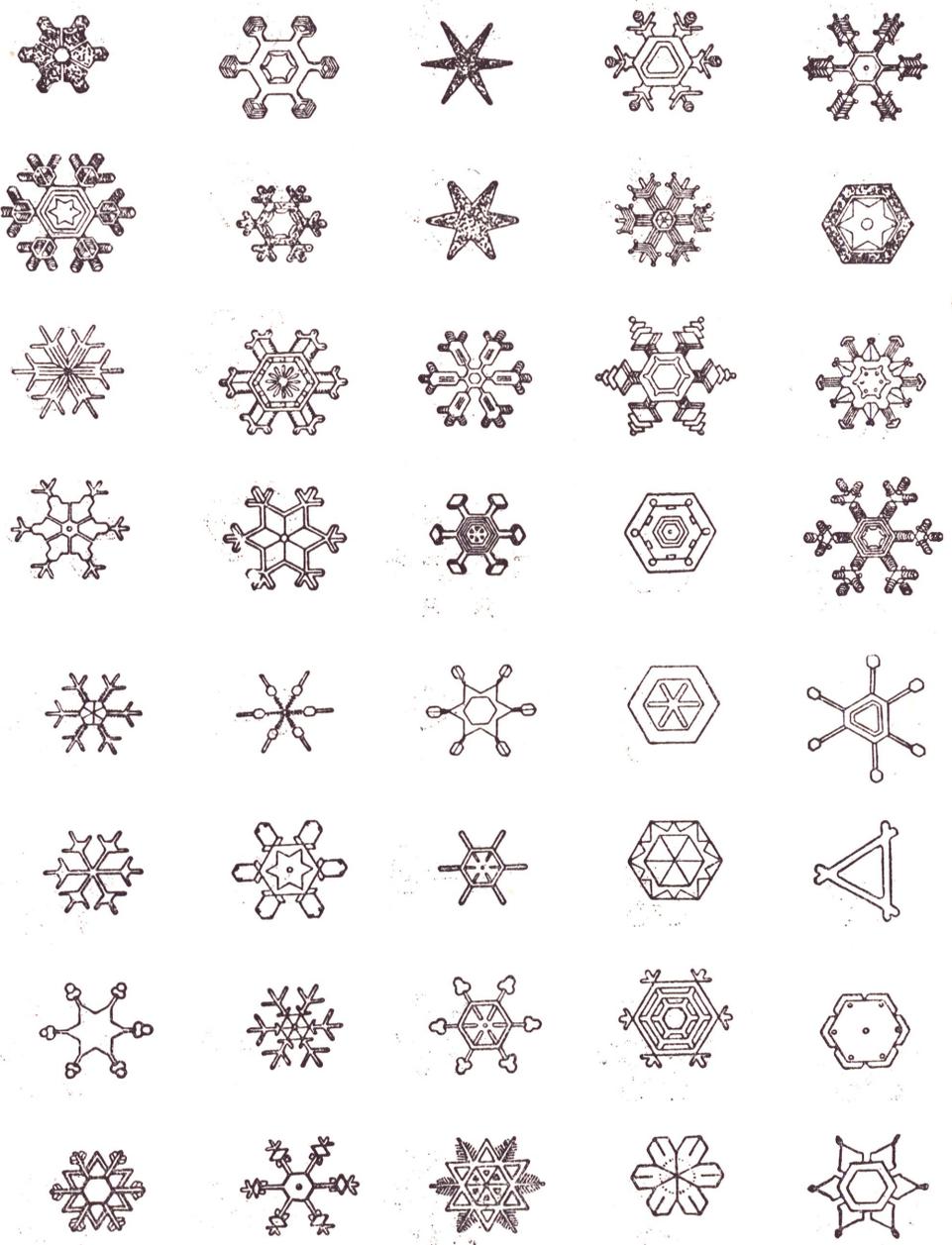


Johannes Kepler stellt in vorliegender Schrift erstmalig die hexagonale Symmetrie der Schneekristalle fest; er bemüht sich in geistreicher Weise unter Heranziehung aller damals bekannten Vergleichsmöglichkeiten (Bienenwaben, Granatapfelkerne, Kugelpackungen) eine Erklärung für die immer wiederkehrende Symmetrie des Schnees zu finden. Er unterscheidet zwischen beseelten Naturobjekten (Pflanzen und Tiere), deren Formbestreben auf eigenen Willen zurückgeht, und unbeseelten Naturobjekten (Kristalle, Mineralien) mit Formbestreben auf Grund materieller Notwendigkeit (geometrische Raumerfüllung), diese entspricht nach heutiger Auffassung dem Koordinationsbestreben der chemischen Bausteine. Die chemischen Bausteine der Kristalle — die Atome, Ionen und Moleküle, insbesondere die beiden ersteren — haben das Bestreben, sich möglichst hochsymmetrisch mit ihresgleichen zu umgeben und charakteristische Baugruppen zu bilden. Die Art der entstehenden Baukomplexe hängt von der relativen Zahl und Größe, von der Wertigkeit und Bindungsart der Atome und Ionen ab, während in Molekülgittern mehr die spezielle Form der Moleküle maßgebend ist.

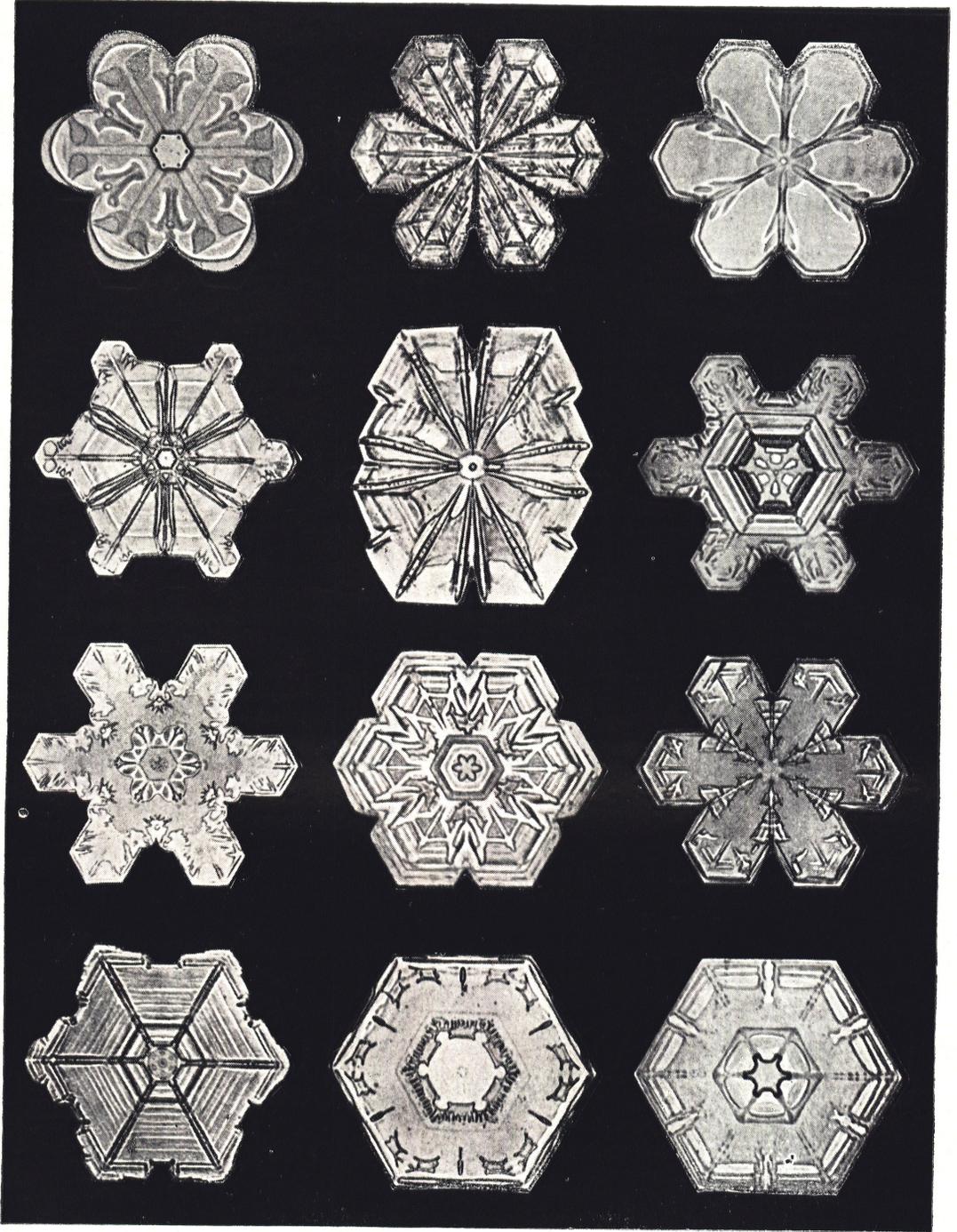
Das Koordinations- und Symmetriestrebem der chemischen Bausteine wird unter gleichbleibenden Temperatur- und Druckverhältnissen konsequent beibehalten und führt beim Wachsen der Kristalle zu dreidimensional periodischen Strukturen, den Raumgitterstrukturen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Anordnung wurde im Prinzip erstmalig von Johannes Kepler in der hier vorliegenden Schrift in Erwägung gezogen, von L. A. Seeber 1822 in seinem „Versuch einer Erklärung des Baues der festen Körper“ als Hypothese aufgestellt und schließlich durch das berühmte Experiment von Max von Laue 1912 bestätigt.



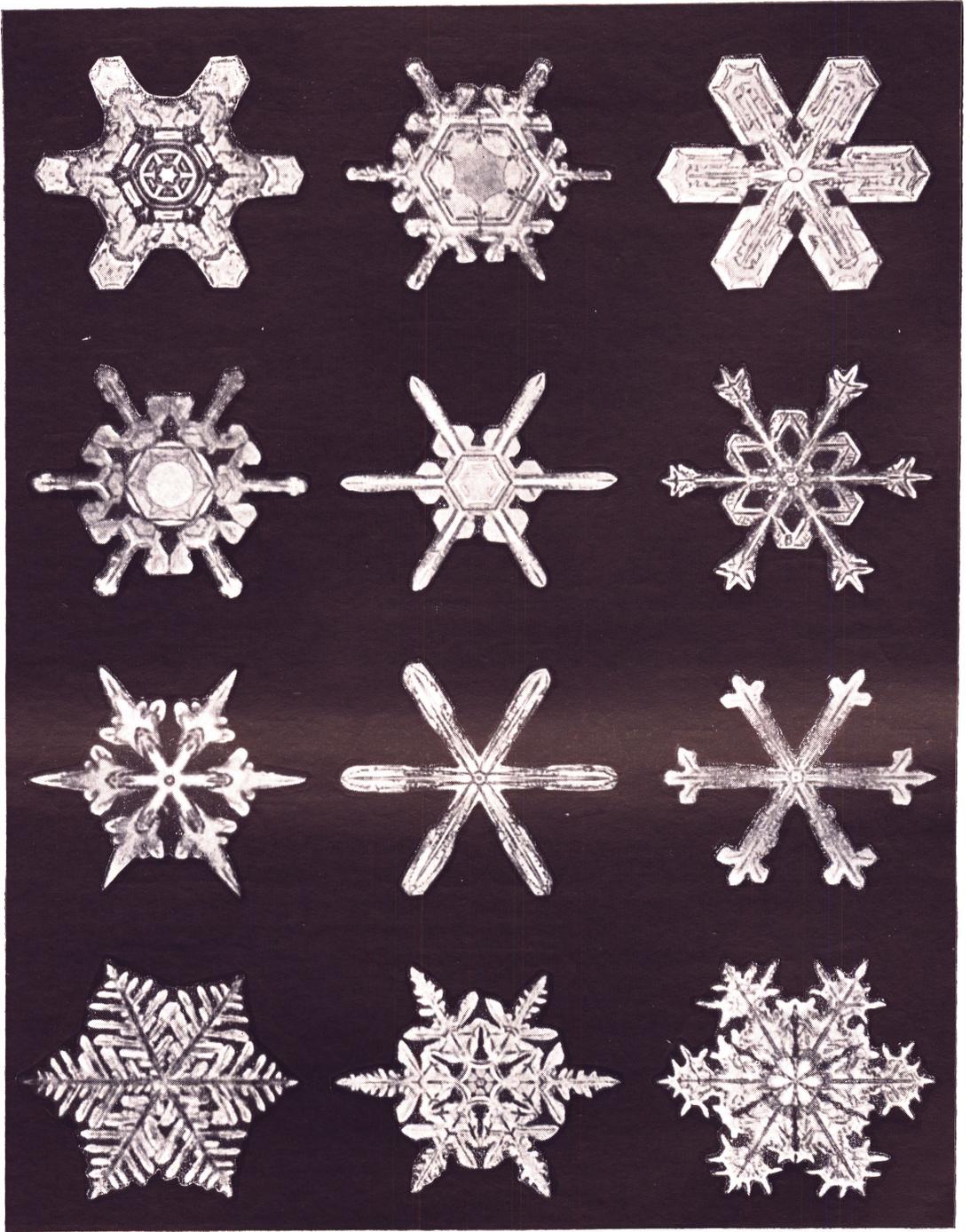
Variationen in der Gestalt der Schneekristalle.



Variationen in der Gestalt der Schneekristalle.

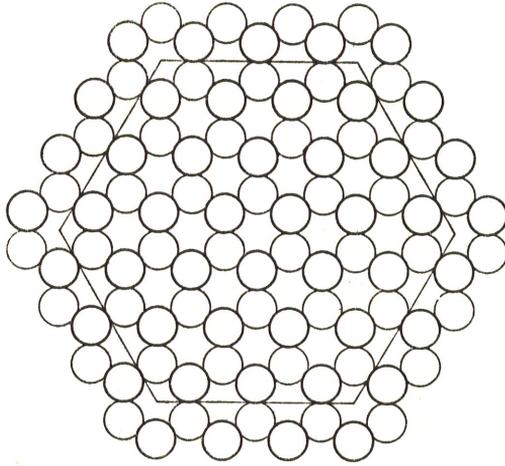


Variationen in der Gestalt der Schneekristalle.



Variationen in der Gestalt der Schneekristalle.

(Diese und die drei vorhergehenden Seiten aus dem Atlas der Kristallformen von V. Goldschmidt.)



Ein größerer Bereich der Kristallstruktur
von Eis bzw. Schnee

(man vergleiche die vorhergehende Abbildung).

Ein Schneekristall hat eine Kantenlänge von 0,786 cm,
wenn sich so viele Wasser-Moleküle nach
diesem Baumotiv zusammengefunden haben,
daß allein längs einer Kante 2 Millionen solcher
Moleküle aneinandergereiht vorliegen.

Das Koordinations- und Symmetrieprinzip bringt ähnlich wie das Entropiegesetz eine fundamentale Neigung der Materie zum Ausdruck, nämlich das Streben nach Symmetrie im Raum bis zur Unendlichkeit (vgl. Mineralogische Tabellen, 3. Auflage, Leipzig 1957).